

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Шадринский государственный педагогический университет»
Факультет информатики, математики и физики
Кафедра физико-математического и информационно-технологического образования

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УЧАЩИМИСЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ
ЗАДАЧ НА УРОКАХ АЛГЕБРЫ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ**

Выпускная квалификационная работа

по образовательной программе 44.03.05 Педагогическое образование

(с двумя профилями подготовки)

(профиль «Информатика», профиль «Математика»)

квалификация – бакалавр

вид – выпускная квалификационная работа опытно-практического характера

формат – исследовательская работа

Исполнитель:

Печеркина Алёна Алексеевна
студент 8-50 группы
заочная форма обучения

Руководитель ВКР:

канд. пед. наук, доцент
Пермякова Марина Юрьевна

Нормоконтролер

Пермякова Марина Юрьевна
Оригинальность ...%

Рецензент

канд. пед. наук, доцент
Оболдина Татьяна Александровна

Шадринск, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ	6
1.1. Сущность метода математического моделирования	6
1.2. Понятие и структура текстовой задачи. Виды задач	13
1.3. Этапы решения текстовых задач методом математического моделирования	20
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ	25
2.1. Сравнительный анализ учебников алгебры основной школы на предмет содержания в них текстовых задач.....	25
2.2. Использование различных моделей условия в процессе решения текстовой задачи.....	32
2.3 Программа элективного курса «Решение текстовых задач методом математического моделирования»	38
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	46
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	48

ВВЕДЕНИЕ

Текстовые задачи играют большую роль в процессе обучения математике. Умение решать текстовые задачи является одним из показателей глубины усвоения знаний и уровня математического развития.

Текстовые задачи являются не только частью содержания школьного материала и целью обучения, но являются и средством формирования математических представлений и понятий, умения учиться, а так же средством реализации системно-деятельностного подхода в обучении.

Решение задач - важнейший вид учебной деятельности, в процессе которой усваивается система математических знаний, умений и навыков.

При решении текстовых задач осуществляется активная математическая деятельность, где учащиеся не только усваивают готовые знания, но и самостоятельно вырабатывают их.

Классически в математике задачи применялись для закрепления полученных знаний, однако сейчас в обучении математике функции задачи стали гораздо значительнее. Таким образом, задачи входят в структуру учебной деятельности на всех ее этапах: мотивационно-ориентировочном, исполнительско-операционном, контрольно-оценочном.

Решение задачи улучшает математическую подготовку учащихся, а именно знания и умения; мыслительные операции и методы; математический стиль мышления; рациональные, продуктивные способы учебно-познавательной деятельности и т.д.

По результатам ЕГЭ за 2018 год с решением задания, содержащего текстовую задачу справляются в среднем около 30% выпускников. Следовательно, можно предположить, что большинство учащихся владеют техникой решения текстовых задач на недостаточном уровне. Из-за нетрадиционной формулировки учащиеся не видят типовые задания, которые

были достаточно хорошо отработаны в рамках школьной программы. На основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что данная тема актуальна для обучения математики в школе. Показателем оценки уровня развития и практическое значение в будущей жизни школьника является умение решать текстовые задачи.

Необходимость разрешения сформулированного противоречия обуславливает *актуальность* настоящего исследования и определяет его *проблему*: как научить учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования?

В рамках решения данной проблемы была определена тема исследования «Использование учащимися метода математического моделирования в процессе решения текстовых задач на уроках алгебры в основной школе».

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся основной школы.

Предмет исследования: обучение учащихся решению текстовых задач методом математического моделирования.

Цель исследования: теоретическое обоснование и разработка программы элективного курса для учащихся 7-9 классов «Решение текстовых задач методом математического моделирования».

В соответствии с поставленной целью сформулированы следующие *задачи исследования*.

1. Изучить и кратко изложить основные теоретические вопросы, связанные с решением текстовых задач методом математического моделирования.
2. Выделить этапы решения текстовой задачи методом математического моделирования.
3. Подобрать, самостоятельно составить, прорешать систематизировать и решить текстовые задачи с различными моделями в условии.
4. Разработать программу элективного курса для учащихся основной

школы «Решение текстовых задач методом математического моделирования».

Для решения поставленных частных задач использовались следующие **методы исследования**: изучение и анализ психолого-педагогической, научно-методической литературы: учебников, учебных программ, государственного образовательного стандарта, материалов Интернет, учебных пособий и пособий для учителя, сборников задач; классификация и систематизация имеющихся в учебных пособиях заданий; самостоятельное составление задач.

Практическая значимость исследования заключается в том, что теоретические результаты доведены до уровня практического применения. Разработаны и частично внедрены в учебный процесс:

- методические материалы по обучению учащихся решению задач методом математического моделирования;
- программа элективного курса по математике «Решение текстовых задач методом математического моделирования», направленного на развитие исследовательских и аналитических умений учащихся.

Структура исследования: выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, шести параграфов, заключения, списка использованных источников и приложений. Общий объем составляет 52 страницы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

1.1. Сущность метода математического моделирования

Объекты и процессы реальной жизни часто настолько сложны и многогранны, что их исследование невозможно без воображения и построения модели, которая будет отображать наиболее простую сторону этих объектов и процессов, чем в реальной жизни.

Строгость, которая необходима педагогической науке, а также увеличение требования к однозначности педагогических понятий придает применение математических методов.

Моделирование является одним из методов научного исследования и достаточно широко применяется в педагогике. Данный метод является интегративным и позволяет объединить эмпирическое и теоретическое в педагогическом исследовании, т.е. сочетать в ходе изучения педагогического объекта эксперимент с построением логических конструкций и научных абстракций.

Метод моделирования в педагогической науке обоснован в трудах В.Г. Афанасьева, В.А. Веникова, Б.А. Глинского, И.Б. Новика, В.А. Штоффа. В качестве рабочего определения примем определение моделирования, данное Г.В. Суходольским, трактующим его «как процесс создания иерархии моделей, в которой некоторая реально существующая система моделируется в различных аспектах и различными средствами». Основным понятием метода моделирования является модель.

Большое количество значений имеет термин «модель» и применяется в различных сферах человеческой деятельности. Моделируемый объект называется оригиналом, моделирующий - моделью.

В процессе опытного изучения мира возникло понятие «модель», а само слово «модель» произошло от латинских слов «modus», «modulus», означающих меру, образ, способ. Почти во всех европейских языках оно употреблялось для обозначения образа или прообраза, или вещи, сходной в каком-то отношении с другой вещью [1].

Существуют различные точки зрения на определение понятия «модель».

Так, например, В.А. Штофф под моделью понимает такую мысленно представляемую или материально реализованную систему, которая отображает и воспроизводит объект так, что ее изучение дает новую информацию об этом объекте [42].

Педагог-филосов А.И. Уемов определяет модель как систему, исследование которой служит средством для получения информации о другой системе [42].

Психологи Ч. Лейв и Дж. Марч дают такое определение модели: «Модель – это упрощенная картина реального мира. Она обладает некоторыми, но не всеми свойствами реального мира. Она представляет собой множество взаимосвязанных предположений о мире. Модель проще тех явлений, которые она по замыслу отображает или объясняет».

Научный деятель В.А. Поляков считает, что «модель – это идеальное формализованное представление системы и динамики ее поэтапного формирования. Модель должна интегрированно имитировать реальные задачи и ситуации, быть компактной, адекватно передавать смены состояний и должна совпадать с рассматриваемой задачей или ситуацией».

Большинство психологов под «моделью» понимают систему объектов или знаков, воспроизводящую некоторые существенные свойства системы-оригинала. Наличие отношения частичного подобия («гомоморфизм»)

позволяет использовать модель в качестве заместителя или представителя изучаемой системы [33].

Иногда под моделью понимают такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания (изучения) замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные черты [17].

Таким образом, модель в самом широком смысле — это любой мысленный или знаковый образ моделируемого объекта (оригинала). В качестве модели могут выступать изображения, описания, схемы, чертежи, графики, уравнения, планы, карты, копии оригинала (уменьшенные или увеличенные), компьютерные программы. При этом модель является отображением оригинала, она в каком-либо отношении должна быть не только удобна для изучения свойств исследуемого объекта, но и позволяла бы перенести полученные при ее изучении знания на исходный объект.

В гуманитарной энциклопедии под моделированием понимается метод воспроизведения и исследования определённого фрагмента действительности (предмета, явления, процесса, ситуации) или управления им, основанный на представлении объекта с помощью его копии или подобия — модели [38].

В словаре по философии «моделирование» - это метод познания, который предполагает построение и изучение модели, а затем перенос полученных данных на моделируемый объект - оригинал [2].

Понятие «моделирование» Р.Ф. Маликов рассматривает как процесс отражения свойств одного объекта (оригинала) в другом объекте (модели). Это могут быть объекты «как есть» в целом и (или) их отдельные сущности – процессы и явления [3].

Я.А. Коменский определяет моделирование как метод для самостоятельного открытия и осмысливания детьми заложенной информации.

Более точное определение, на наш взгляд, принадлежит А.А. Ляпунову. «Моделирование — это опосредованное практическое или теоретическое

исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель): находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом; способная замещать его в определенных отношениях; дающая при ее исследовании, в конечном счете, информацию о самом моделируемом объекте» [20].

В обучении математике можно использовать следующий подход к определению моделирования: под моделированием будем понимать «обобщенное интеллектуальное умение учащихся, состоящее в замене математических объектов, их отношений, способов деятельности моделями в виде изображений отрезками, числовыми лучами, схемами, значками» [28].

Моделирование используется во многих отраслях профессиональной и научной деятельности человека и считается одним из методов научного познания.

Математическое моделирование представляет собой формализованное описание системы (или операции) на некотором абстрактном языке, например, в виде совокупности математических соотношений или схемы, алгоритма, то есть такое математическое описание, которое обеспечивает имитацию работы систем или устройств на уровне, достаточно близком к их реальному поведению, получаемому при натурных испытаниях систем или устройств [4].

Математическое моделирование – формальные модели, описывающие исходный объект комплексом абстрактных соотношений, чаще всего набором уравнений, то есть при их описании используют формализованные средства [25].

В своих исследованиях Г.И. Саранцев дает определение «математическому моделированию» как приближенному описанию какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Однако, моделирование — это еще и метод

познания окружающего мира, дающий возможность управлять им [41].

В работах Н.Н. Моисеева математическое моделирование рассматривается как способ описания, который позволяет для анализа использовать формально-логический аппарат математики. Изучение математических моделей является основным методом познания, который используется в различных науках [28].

На основании теоретического и практического материала под *математическим моделированием в педагогике* будем понимать метод описания свойств и закономерностей педагогических явлений и процессов с помощью математических моделей.

Под математической моделью будем понимать совокупность соотношений (формул, неравенств, уравнений, логических соотношений), записанных на языке математики, которые определяют основные характеристики объекта в зависимости от его элементов, свойств, параметров и внешних воздействий. Выделим классификацию применяемых в обучении методов математических моделей, которые представлены на рисунке 1.1 [15].

Все математические модели по использованному формальному языку можно разбить на аналитические и имитационные.

Модели, в которых используется стандартный математический язык называют аналитическими моделями. Такие модели можно записать в виде формул или уравнений.

Процесс, который нельзя описать аналитической моделью, описывают с помощью специальных алгоритмов или программ. Такую модель называют имитационной, здесь используется специальный язык программирования.

Аналитические модели делят на теоретические и эмпирические модели.

В теоретических моделях отражаются реальные процессы исследуемых объектов.

Эмпирические модели строятся на основе изучения реакций объекта на изменение условий окружающей среды. При этом теория работы объекта не

рассматривается, сам объект представляет собой так называемый «черный ящик», а модель – некоторую интерполяционную зависимость. Рассматриваемые модели могут быть построены на основе экспериментальных данных, которые получены непосредственно на исследуемых объектах или с помощью их физических моделей.

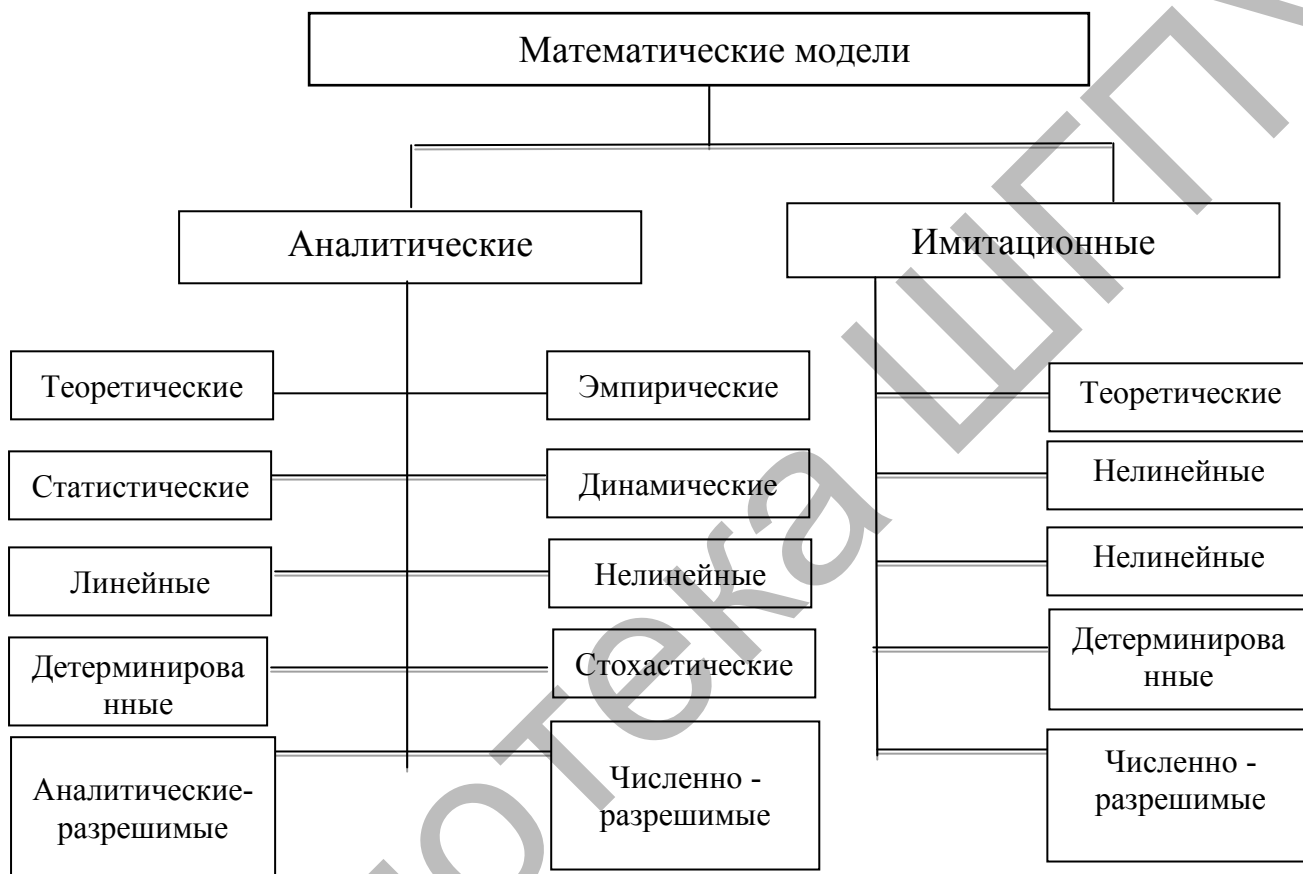


Рисунок 1.1. Классификации математических моделей

Аналитические модели, по форме описания, могут быть подразделены на линейные и нелинейные. *Статическая* модель - когда все входящие в модель величины не зависят от времени, иначе получаем *динамическую* модель.

В *детерминированных* моделях все взаимосвязи, переменные и константы заданы точно, что приводит к однозначному определению результирующей функции. Если часть или все параметры, входящие в модель по своей природе являются случайными величинами или случайными функциями, то модель относят к классу *стохастических* моделей.

Модель будет называться *аналитически разрешимой*, если исследование

может быть доведено до конца, иначе говорят о *численно разрешимых* аналитических моделях.

Математическое моделирование служит особым видом образно-знаковой идеализации и построения научной предметности и позволяет видеть предмет как объект исследования, определять действия с ним еще до получения конечного результата.

Умением моделировать предполагает поэтапное овладение конкретными предметными умениями: представлять задачу в виде таблицы, схемы, числового выражения, формулы (уравнения), чертежа и уметь осуществлять переход от одной модели к другой [41].

Изучение моделирования определяет развитие любой науки и имеет огромное практическое значение. Необходимость моделирования обусловлена сложностью, а порой и невозможностью прямого изучения реального объекта (процесса). Значительно доступнее создавать и изучать прообразы реальных объектов (процессов), т.е. модели. Можно сказать, что теоретическое знание о чем-либо, как правило, представляет собой совокупность различных моделей. Эти модели отражают существенные свойства реального объекта (процесса), хотя на самом деле действительность значительно содержательнее и богаче.

Таким образом, практическое значение математического моделирования заключается в следующем.

1. Математические модели более удобны для исследования, чем исходные объекты. Кроме того, некоторые объекты можно изучить только на моделях.
2. Математическое моделирование позволяет выявить наиболее существенные факторы изучаемого объекта или явления, поэтому является инструментом для более глубокого изучения реальности.

1.2. Понятие и структура текстовой задачи. Виды задач

Текстовые задачи играют важную роль в образовании. Решение текстовых задач формирует всестороннее развитие учащихся, а именно устанавливать связи, анализ и отстаивать свою точку зрения. Решение задач оказывает на развитие математической речи огромное влияние, улучшаются воображение, внимание и память учащихся, а так же решение задач оказывает воздействие на активность и инициативу, воспитывает волю.

Большое практическое значение, связывающим звеном теории и практики являются текстовые задачи. У детей при решении текстовых задач формируются умения, необходимые каждому человеку в повседневной жизни.

Термин «задача» широко используется в жизни, различных науках и в учебных дисциплинах: психологии, логике, педагогике, математике, физике. Однозначного толкования этого понятия нет [3].

В различных областях знаний (психология, педагогика, математика, методика математики) сущность определения «задача» исследовали Г.А. Балл, Ю.М. Колягин, Л.М. Фридман, В.И. Крупич, А.Ф. Эсаулов, П.М. Эрдниев. Отличие в подходах авторов к содержанию понятия «задача» состоит, в том, что они с разный подход к отношению между субъектом и задачей. Одни из них рассматривают задачу как ситуацию, в которой действует субъект, в других трактовках субъект не включается в понятие задачи [14].

В педагогике под задачей понимают осмысление сложившейся педагогической ситуации и принятие на этой основе решений и плана необходимых действий [13].

В психологии под задачей понимают цель деятельности, данной в определенных условиях и требующая для своего достижения использования адекватных этим условиям средств, а процесс решения задачи представляет поиск, мобилизация и применение этих средств (способов, действий,

операций) [4].

По мнению Л.М. Фридмана, задача — проблемная ситуация с явно заданной целью, которую необходимо достичь; в более узком смысле задачей называют цель, данную в рамках проблемной ситуации, которую требуется достичь [42].

Педагог-психолог *А.А. Вербицкий* под задачей понимает отраженную в сознании или объективированную в знаковой модели проблемную ситуацию, содержащую данные и условия, которые необходимы и достаточны для ее разрешения наличными средствами знания и опыта.

В своей работе под задачей мы будем понимать задание, которое должен выполнить субъект, или вопрос, на который он должен найти ответ, опираясь на указанные условия и все вытекающие из них следствия [39].

Текстовой задачей будем называть описание некоторой ситуации (явления, процесса) на естественном и (или) математическом языке, требующей количественно охарактеризовать какой-либо компонент этой ситуации), установить наличие или отсутствие отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения, найти последовательность требуемых действий [10].

Текстовая задача имеет две части: условия и требования (вопроса). В условии сообщаются характеристики об объектах и некоторых величинах, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними.

Требование задачи – это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной или вопросительной форме.

Решить задачу – это значит через логически верную последовательность действий и операций с имеющимися в задаче явно или косвенно числами, величинами, отношениями выполнить требование задачи (ответить на её вопрос).

Задачи, решаемые в школьном курсе математики, весьма разнообразны. Для того чтобы определить способ, метод решения конкретной задачи, надо

определить вид этой задачи.

По математическому содержанию выделяют: арифметические, алгебраические, геометрические, тригонометрические, комбинаторные.

По методам решения рассматривают практические, арифметические, алгебраические, графические, геометрические, комбинированные.

По характеру требований выделяют: задачи на вычисление, доказательство, преобразование, конструирование, построение.

В зависимости от языка изложения задачи делят на текстовые, сюжетные и абстрактные [26].

В учебнике Ивановой Т.А. и статье Шаровой О.П. [39] текстовые задачи являются подразделом сюжетных.

«Задача, в которой зависимость между условием и требованием сформулирована словами, называется текстовой. Если в текстовой задаче речь идет о реальных объектах, процессах, связях и отношениях, то задача называется сюжетной» [34].

Любая текстовая задача представляет собой словесную модель ситуации, явления, события или процесса. Но в ней описывается не все событие или явление, а только его количественные и функциональные характеристики. Основная трудность заключается в нахождении пути решения.

В текстовых задачах школьного курса алгебры можно выделить 6 групп: задачи «на движение», задачи «на работу», задачи «на проценты», задачи «на концентрацию» и задачи «на прогрессии», задачи с экономическим содержанием [19]. Рассмотрим особенности каждой группы.

1. *Задачи «на движение».* На основании условий задач на движение составляются системы уравнений, которые содержат следующие величины: скорости движения объектов, время, ускорение, расстояние, а также скорость течения (движение по реке) [34].

Для решения задач на различные виды движения нужно помнить следующие факты.

1. Пройденный путь S при равномерном движении определяется по формуле $S = v \cdot t$, где v – скорость, t – время;

2. Повороты движущихся, а также изменение скорости движения тел происходят мгновенно, без затрат времени.

3. Скорость – величина положительная.

4. Если объекта движется по течению реки, скорость которой равна u , а собственная скорость объекта в стоячей воде равна v , то скорость объекта относительно берега будет равна $u + v$. При движении объекта против течения реки u , с собственной скоростью v должно выполняться неравенство $v > u$.

5. Если в условии задачи говорится о движении плотов, то скорость его движения считают равной скорости течения реки [18].

2. *Задачи «на работу».* В таких задачах содержится информация о выполнении некоторой работы несколькими субъектами. Объём работы не указывается и не является искомым, выполняемая работа с постоянной производительностью для каждого субъекта (равномерно) [34].

Системы уравнений в таких задачах содержат следующие величины: p – производительность (работа, производимая за единицу времени); t – время выполнения работы; A – работа, выполняемая за время. Взаимосвязь этих величин выражается формулой $p = \frac{A}{t}$.

В качестве работы в подобных задачах может выступать объём жидкости, выливаемой или наливаемой в емкость. Величина выполняемой работы часто не важна, поэтому объём всей работы или емкости принимают за единицу, т. е. $A = 1$ [33].

3. *Задачи «на концентрацию».* Решение таких задач основывается на следующих понятиях: массовая концентрация вещества в смеси; объёмная концентрация вещества в смеси; процентное содержание вещества в смеси; объёмное процентное содержание компоненты.

Также необходимо знать следующие факты:

1) все смеси, рассматриваемые в задачах, принято считать однородными;

2) между литром (единицей ёмкости и единицей массы) не делается различия;

3) химические и другие реакции между компонентами раствора отсутствуют [42].

4. *Задачи «на проценты»*. Виды задач:

1) найти число a , составляющее n процентов от числа b ;

Решение: $a = 0,01nb$.

2) обратная задача: найти число b , если n процентов от него равно a ;

Решение: $b = \frac{a}{0,01n}$

3) найти, сколько процентов составляет число a от числа b .

Решение: $n = \frac{100a}{b}$

5. *Задачи «на прогрессии»*.

Для решения задач этого вида необходимы следующие математические факты. Арифметическая прогрессия – числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность арифметической прогрессии): $a_{n+1} = a_n + d$. Формула разности: $d = a_{n+1} - a_n$. Формула n -го (общего) члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d \cdot n - 1$. Формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Геометрическая прогрессия – числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель геометрической прогрессии, не равное нулю): $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $q \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Формула знаменателя: $q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Формула n -го (общего) члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$. Формулы суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$.

6. *Задачи с экономическим содержанием*. Эти задачи условно можно

разделить на два вида: задачи, использующие в условии дискретные модели (проценты, погашения кредитов, прибылях и убытках); задачи, использующие в условии непрерывные модели (различные производства, протяженные во времени, объемы продукции).

В условии экономической задачи можно встретить такие величины как сумма кредита, процентная ставка, периодическая выплата по кредиту, стоимость ценной бумаги и другие [9].

Пусть размер кредита равен S , процент банка p , а ежегодная выплата по кредиту K .

Формулы для подсчета процентов:

а) $S \cdot 1 + \frac{p}{100}$ – увеличение размера кредита на процент банка;

б) $S \cdot 1 - \frac{p}{100}$ – уменьшение размера кредита на процент банка;

в) $S \cdot 1 + \frac{p}{100}^2$ – увеличение размера кредита два раза на процент банка;

д) $S \cdot 1 + \frac{p}{100}^n$ – увеличение размера кредита в n раз на процент банка.

Рассмотрим ситуацию, когда заемщик выплачивает сумму K по кредиту. Размер долга через год после начисления процентов и выплаты суммы K составит $S \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) - K$.

Введем замену переменных, обозначим: $P = \left(1 + \frac{p}{100}\right)$ $P = 1 + \frac{p}{100}$, тогда $S + P - K$.

Через два года размер долга будет равен: $S + P - K \cdot P - K$.

Через три года: $S + P - K \cdot P - K \cdot P - K$.

Через четыре года: $S + P - K \cdot P - K \cdot P - K \cdot P - K$.

Через n лет: $S \cdot P^n - K (P^n + P^{n-1} + \dots + P^2 + P + 1)$.

Выражение в скобках – геометрическая прогрессия.

Формула для суммы n членов геометрической прогрессии: $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$.

Применим эту формулу для суммы P членов геометрической прогрессии, где b_1 равен 1, а q равен P . Размер долга через n лет равен: $SP^n - K * \frac{1-p^n}{1-p}$.

В формуле содержатся четыре переменные: размер денежной суммы – S ; процент банка – p ; периодическая выплата банку – K ; временной промежуток – n .

Выделяют типы экономических задач, в зависимости от неизвестной переменной:

- 1) задачи на нахождение количества лет выплаты кредита;
- 2) задачи на вычисление процентной ставки по кредиту;
- 3) задачи на нахождение суммы кредита;
- 4) задачи на нахождение периодической выплаты банку.

Таким образом, мы изучили и описали основные теоретические вопросы, связанные с решением текстовых задач и ее видами. Важным средством обучения математике является именно текстовая задача. С ее помощью учащиеся постигают взаимосвязи между величинами, получают опыт работы с ними, и учатся применять задачи математики к решению практических задач. Наиболее эффективной формой развития математической деятельности является решение задач.

Текстовые задачи развивают у учащихся логическое и алгоритмическое мышление, формируют практические навыки применения математики. Задачи помогают ввести понятия, усвоить математическую символику и терминологию, выявляют их существенные свойства, определяют связь одного понятия с другим.

1.3. Этапы решения текстовых задач методом математического моделирования

Реализация системно-деятельностного подхода, положенного в основу федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (ФГОС ООО), требует формирования универсальных учебных действий в рамках метапредметных результатов освоения обучающимися основной образовательной программы. Формирование универсальных учебных действий обеспечивает обучающимся умение учиться, способность к саморазвитию и самосовершенствованию, «умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач» [36].

Обучающиеся в результате изучения предметной области «Математика. Алгебра. Геометрия. Информатика» развивают математическое и логическое мышление, получают представление о математических моделях; осваивают технику математических рассуждений и умения решать учебные задачи; развивают математическую интуицию; учатся при решении различных задач применять математические знания и оценивать полученные результаты.

К познавательным универсальным учебным действиям относят общеучебные и логические, постановка и решение проблемы. Умение решать проблемы или задачи в разных сферах человеческой деятельности - одно из важнейших познавательных универсальных действий. Данное универсальное учебное действие рассматривается как модельное для системы познавательных действий.

Моделирование относится к особой группе общеучебных универсальных действий – знаково-символических.

Любая задача рассматривается как «модель» некоторой проблемной ситуации, а её решение – процесс использования совокупных теоретических положений математики и общелогических правил вывода к условиям задачи.

При решении задач математическими моделями могут выступать числовые формулы, числовые таблицы, буквенные формулы, функции, уравнения алгебраические или дифференциальные и их системы, неравенства, системы неравенств и уравнений, ряды, геометрические фигуры, различные граф-схемы, диаграммы Венна, графы.

При построении модели применяются операции мышления: анализ и синтез, сопоставление, классификация, обобщение. Перевод задачи на язык математики постепенно подводит учащихся к моделированию настоящих процессов и явлений в их будущей работе или окружающей действительности.

При решении задачи итогом работы учащихся является формирование умения отбора необходимых операций, которые приводят к получению желаемого результата. От особенностей и структуры задачи зависит выбор операций, которые зависят от сформированности приемов умственной учебной деятельности учащихся. Поэтому возникает необходимость распределения процесса решения задачи по этапам, каждый из которых является законченной частью решения и позволяет выполнить операции следующего этапа [16].

Анализ работ Л.М. Фридмана, А.Г. Мордковича, Т.Е. Демидова позволил сделать вывод о том, что деятельность по решению задачи, независимо от выбранного метода решения, включает следующие этапы.

1. Анализ условия задачи.
2. Выбор пути решения задачи и составление плана ее решения:
 - а) определение основания для составления выражения, уравнения, системы уравнений;
 - б) составление выражения, уравнения, системы уравнений.
3. Решение задачи согласно плану.
4. Проверка решения задачи.
5. Запись ответа.
6. Анализ решения задачи [12].

В различных сферах человеческой деятельности построение математических моделей началось не так давно, а с появлением и распространением информационных технологий приобрело широкий спектр применения.

При решении текстовых задач применяются алгебраические и аналитические модели. Такой моделью может быть функция, которая описывает явление или процесс; уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств. Задача при составлении модели переводится на язык алгебры или математического анализа.

Процесс математического моделирования состоит из следующих этапов:

1. Постановка задачи и определение свойств объектов, подлежащих исследованию;
2. Выявление невозможности или затруднительности исследования объекта;
3. Выбор модели, которая описывает существенные свойства объекта и легко поддается исследованию;
4. Исследование модели в соответствии с поставленной задачей;
5. Перенос результатов исследования модели на объект;
6. Проверка полученных результатов.

Этапы математического моделирования в учебных целях:

1. Перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математики;
2. Внутримodelьное решение задачи в рамках математической теории;
3. Перевод полученного результата математического решения (интерпретация).

Понятие математической модели и основные этапы процесса математического моделирования иллюстрируются и изучаются при изучении всего курса математики. Разделы школьной программы, включающие задачи на работу, проценты, прогрессии, движение, сюжетные задачи на использование

производных и интегралов, могут быть рассмотрены как введение в метод математического моделирования.

Рассмотрим применение метода математического моделирования на каждом из этапов решения задачи.

1. Анализ и запись условия задачи (перевод задачи с естественного языка на язык математики, формализация, то есть построение математической модели задачи).

2. Поиск пути решения задачи и составление плана ее решения.

На этом этапе делается акцент на ключевые характерные черты и связи между ними на качественном уровне. Найденные зависимости описываются на языке математики, строится математическая модель. Это наиболее сложная стадия моделирования.

3. Осуществление плана решения задачи.

Осуществляется внутримodelьное решение задачи. Полученные результаты описываются на языке математики (формула, таблица, график, схема).

4. Проверка решения задачи.

На этом этапе идет согласование результатов решения с теоретическими следствиями в пределах, установленных задачами.

5. Запись ответа.

Осуществляется анализ, полученных результатов и производится отбор соответствующих чисел, которые будут записаны в качестве ответа. В случае если таких чисел нет, необходимо выполнить дополнительные действия.

6. Анализ решения (усложнение или упрощение модели, для достижения практически приемлемого решения) [13].

В процессе решения задачи не всегда выделяют все этапы в явном виде, так как они не имеют четких границ, чаще всего делают это, переходя от одного этапа к другому незаметно для себя [17]. Решение каждой текстовой задачи должно содержать все указанные этапы. Это делает процесс решения любой

задачи целенаправленным и осознанным. Упущение одного из этапов может привести к неверному решению, а игнорирование — к получению неверного ответа.

Выводы по первой главе

В процессе решения первой и второй задачи выпускной квалификационной работы мы можем сделать вывод о том, что математические модели наиболее удобный метод решения текстовых задач, который позволяет четко выявить наиболее существенные факторы изучаемого объекта или явления, поэтому является инструментом для более глубокого изучения реальности.

Важным средством обучения математике является именно текстовая задача. С ее помощью учащиеся постигают взаимосвязи между величинами, получают опыт работы с ними, и учатся применять задачи математики к решению практических задач. Наиболее эффективной формой развития математической деятельности является решение задач.

Решение каждой текстовой задачи должно содержать все указанные этапы. Это делает процесс решения любой задачи целенаправленным и осознанным, а значит, более успешным для школьников.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

2.1. Сравнительный анализ учебников алгебры основной школы на предмет содержания в них текстовых задач

Вторую главу нашей выпускной квалификационной работы начнем с действующих учебников алгебры 7-9 классов, входящих в федеральный комплект учебников на 2016-2018 годы на наличие текстовых задач, решаемых методом математического моделирования тех авторов, чьи комплексы используют школы нашего района, а именно: Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина, Г.В. Дорофеева.

В настоящее время во многих общеобразовательных школах используются учебники алгебры под редакцией Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина, Г.В. Дорофеева. По этим учебникам учителя долгое время ведут обучение школьников математике, что обеспечило накопление положительного опыта работы.

В ходе исследования были рассмотрены действующие учебники алгебры 7-9 классов, входящие в федеральный комплект учебников на 2016-2018 годы следующих авторов: Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина, Г.В. Дорофеева [37].

Сравнительная характеристика учебников приведена в таблице 2.1 по следующим аспектам: введение понятия модели, последовательность изучения тем с использованием понятия математической модели, использование метода математического моделирования в процессе решения текстовых задач.

Таблица 2.1

Сравнительная характеристика учебников алгебры 7 класса на предмет изучения метода математического моделирования

Учебники для учащихся общеобразовательных классов		
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А. Теляковского [22].	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [29].	Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Буникович [6].
Тема		
Решение задач с помощью уравнений	Математическая модель текстовой задачи	Задачи на проценты
Последовательность изучения темы		
- представлен алгоритм и подробное решение текстовой задачи с помощью уравнения	- математическая модель; - текстовые задачи с подробными решениями и примечаниями; - задачи на выполнение плановых заданий, на количество, на сплавы и смеси, на движение.	- правила перехода от процентов к дробям и обратно; - решены подробно пять задач на проценты. Некоторые задачи имеют по два способа решения.
Определение математической модели		
Не дано определения математической модели.	Задача формулируется на обычном языке и переводится на математический язык – создается математическая модель задачи.	Не дано определения математической модели.
Тема		
Линейное уравнение с двумя переменными	Решение уравнений	Пропорции. Решение задач с помощью пропорций
Последовательность изучения темы		
Текстовая задача рассматривается после изучения темы, в задаче необходимо найти решения уравнения с двумя переменными.	- текстовая задача из пункта «Математическая модель текстовой задачи» рассматривается подробно, разбирается ее решение (разбор уравнения).	Три текстовые задачи представлены после определения пропорции, приведения ее свойств, в их решении применяется пропорциональность.
Тема		
Решение задач с помощью систем уравнений	Уравнения с двумя переменными и их системы	Алгебраический способ решения задач Решение задач с помощью уравнений Решение задач с помощью уравнений
Последовательность изучения темы		
- приведен алгоритм решения задачи с помощью системы уравнений - рассмотрено две задачи с	- рассмотрена текстовая задача, моделью которой является система уравнений с двумя неизвестными;	перевод задачи на математический язык, введение переменной, составление уравнения,

подробными решениями.	- анализ этой задачи.	пример решения задачи; – выделены правила для обозначения переменной в текстовой задаче; – использование схем и рисунков, помогающих провести анализ текстовой задачи.
-----------------------	-----------------------	--

Анализируя учебник Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [22] можно сказать, что учащиеся начинают решать текстовые задачи методом математического моделирования после изучения линейных уравнений с одной переменной. Однако, в данном учебнике не приводится суть метода и не дается понятие математической модели.

Анализ учебника по алгебры для учащихся 7 класса авторов Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [29] показал, что учащиеся рассматривали параграф «Выражения», в котором приведены понятия числового выражения и выражения с переменной перед изучением математической модели. В теме «Математическая модель текстовой задачи» авторы поясняют, что текстовые задачи переводились на математический язык путем составления выражений в предыдущих пунктах. После объяснения смысла математического моделирования авторы приводят сюжеты текстовых задач, которые встречаются чаще всего. В каждом представленном случае приводятся примеры, подробно описывается процесс создания математической модели. Практикум по решению текстовых задач, в котором для каждой задачи составлены наводящие вопросы, а в некоторых из них введена переменная приведен в конце учебника.

В учебнике Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович для 7 класса [6] в четвертой главе «Уравнения» рассмотрен пункт «Алгебраический способ решения задач», в котором применяется метод математического моделирования, но явно об этом не проговаривается. После этого рассматривается решение уравнений. Авторы приводят тему «Решение задач с помощью уравнений» после того, как учащиеся научатся решать уравнения. В этом пункте рассмотрены некоторые правила, используемые в текстовой задаче

для обозначения переменных. В седьмой главе «Многочлены» в пункте «Решение задач с помощью уравнений» рассматривается применение рисунков и схем, помогающих анализировать текстовую задачу.

Анализ школьных учебников алгебры для учащихся 8 класса приведен в таблице 2.2.

Таблица 2.2

Сравнительная характеристика учебников алгебры 8 классов

Учебники для учащихся общеобразовательных классов		
Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А. Теляковского [23].	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [30].	Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Буникович [7].
Тема		
Решение задач с помощью квадратных уравнений	Дробные уравнения с одной переменной	Решение уравнений и задач
Последовательность изучения темы		
решение текстовой задачи при помощи квадратного уравнения	пример решения текстовой задачи, математической моделью которой является дробное уравнение.	- пример решения текстовой задачи алгебраическим способом, в результате которого получили уравнение (задача на концентрацию); - понятие концентрации.
Тема		
Решение задач с помощью рациональных уравнений	Прямая и обратная пропорциональность величин	Решение задач (в теме «Квадратные уравнения»)
Последовательность изучения темы		
решение текстовой задачи при помощи рационального уравнения.	- пропорциональность величин в формуле пути, примеры других пропорциональных зависимостей; - приведены примеры текстовых задач, в которых используются свойства пропорциональностей.	- приведен пример текстовой задачи, решенной с помощью квадратного уравнения; - введено понятие математического моделирования и некоторые практические советы по составлению математической модели.
Определение математической модели		
Не дано определения математической модели.		В задаче описывается жизненная ситуация, и составлено уравнение, представляющее математическую модель ситуации.

Тема			
Решение систем неравенств с одной переменной	Задачи, приводящие к квадратным уравнениям	Линейное уравнение с двумя переменными	
Последовательность изучения темы			
Материал данной темы объясняется на примере решения текстовой задачи, решенной при помощи системы неравенств.	- приведен пример решения текстовой задачи с «физическим» сюжетом, математической моделью которой является уравнение, сводящееся к квадратному уравнению.	После изучения данной темы, рассматривается текстовая задача, с введением двух переменных и составлением уравнения.	
Тема			
-	Решение задач с помощью систем уравнений	Решение задач с помощью систем уравнений	
Последовательность изучения темы			
	- приведены четыре примера решения текстовых задач, математические модели которых – системы уравнений с двумя неизвестными.	- пример решения текстовой задачи и арифметическим способом, и с помощью математической модели (система двух уравнений с двумя неизвестными); - пример решения текстовой задачи методом математического моделирования (система трех уравнений с тремя неизвестными).	

В учебнике Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [23] текстовые задачи встречаются почти в каждой теме в качестве упражнений на повторение или закрепление изученного материала. Больше количество текстовых задач в данном учебнике представлено в пунктах «Решение задач с помощью квадратных уравнений» и «Решение задач с помощью рациональных уравнений». В каждом из них приводятся примеры решения соответствующих задач, большое количество текстовых задач выделены в качестве упражнений.

Анализ учебника Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [30] показал, что большее количество текстовых задач приведено в пунктах «Дробные уравнения с одной переменной», «Прямая и обратная пропорциональность величин», «Задачи, приводящие к квадратным уравнениям», «Решение задач с помощью систем уравнений». В конце учебника «Практикум по решению задач». Задачи

сгруппированы по фабуле («Задачи на движение», «Задачи на совместную работу»), всего 11 задач. К каждой задаче выделены рекомендации и прописаны шаги, которые необходимо выполнить, чтобы в конечном итоге получить ответ задачи.

В учебнике Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович [7] выделен пункт «Решение уравнений и задач», в котором рассмотрен пример решения текстовой задачи алгебраическим способом (задача на концентрацию). Тут же приводится понятие концентрации. В пункте «Решение задач» (в теме «Квадратные уравнения») рассматривается пример текстовой задачи, решаемой с помощью квадратного уравнения, а также вводится понятие метода математического моделирования. В данном учебнике представлено большое количество текстовых задач, решаемых методом математического моделирования.

Анализ школьных учебников алгебры для учащихся 9 класса приведен в таблице 2.3.

Таблица 2.3

Сравнительная характеристика учебников алгебры 9 классов

Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А. Теляковского [24].	Г.К. Муравин, О.В. Муравина [31].	Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович [8].
Тема		
Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	Границы значений величин	Решение задач (В теме «Уравнения и системы уравнений», после рассмотрения различных уравнений)
Последовательность изучения темы		
Представлено решение текстовой задачи, алгебраической моделью которой является система уравнений второй степени с двумя переменными.	Представлена задача, в которой масса кочана капусты больше 2,5 кг, но меньше 2,6 кг, записано соответствующее двойное неравенство	- пример решения текстовой задачи, математической моделью которой является дробное уравнение.
Тема		
-	Неравенства с одной переменной и их системы	Решение задач (В главе «Уравнения и системы уравнений», после

		рассмотрения системы уравнений с двумя переменными)
Последовательность изучения темы		
	В теории и на примерах решение текстовых задач, решаемых методом математического моделирования, не рассматривается, однако в качестве упражнений такие текстовые задачи встречаются.	- пример решения текстовой задачи, математической моделью которой является система уравнений с двумя переменными.

В учебнике Ю.Н. Макарычева, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешкова, С.Б. Суворовой [24] приведено небольшое количество текстовых задач, решаемых методом математического моделирования. На наш взгляд, в учебнике Г.К. Муравина, О.В. Муравиной [31] текстовых задач достаточно для того, чтобы учащиеся освоили метод математического моделирования, используя имеющиеся у них средства алгебры. В учебнике Г.В. Дорофеева, С.Б. Суворовой, Е.А. Бунимович [8] рассматривается решение текстовых задач, математической моделью которых являются уравнения или их системы, изучаемые в соответствующей главе учебника. В качестве упражнений авторами приводится большое количество текстовых задач.

Таким образом, сравнительный анализ учебников алгебры 7-9 классов показал, что в каждом учебнике существуют свои особенности в изложении теоретического материала, связанного с решением текстовых задач методом математического моделирования.

На наш взгляд, должное внимание изложению основ метода математического моделирования уделено в учебнике под редакцией Г.К. Муравина. В учебнике каждого года обучения приведен «Практикум по решению задач». Все задачи систематизированы («Задачи на движение», «Задачи на совместную работу»). К каждой из них предлагается четкий анализ и даны рекомендации, которые необходимо выполнить, чтобы в конечном итоге получить правильный ответ к задаче.

2.2. Использование различных моделей условия в процессе решения текстовой задачи

Роль текстовых задач в процессе обучения математике многообразна. Решение задач повышает вычислительную культуру учащихся; способствует более глубокому усвоению идеи функциональной зависимости; учит школьников применению такого метода познания действительности, как моделирование; способствует более полной реализации межпредметных связей; развивает у учащихся способность анализировать, рассуждать, обосновывать.

Недостаточно познакомить учащихся с научной трактовкой понятий модели и моделирования, недостаточно демонстрировать им разные модели и приводить примеры моделирования отдельных явлений и процессов, чтобы они могли использовать моделирование как метод научного познания. Нужно, чтобы школьники самостоятельно могли строить модели и изучать объекты или явления с применением метода математического моделирования. Применение изучения метода математического моделирования есть фактически во всех школьных дисциплинах: в математике, физике, химии, астрономии, биологии.

Учащиеся применяют математическую модель, решая практические математические или физические задачи, понимают, что она представляет собой знаковую модель некоторой реальной ситуации, проводят внутримodelьное решение, переводят полученное решение на язык исходной задачи, тем самым они познают суть метода математического моделирования.

Большие возможности для освоения этого метода скрыты в решении разнообразия математических текстовых задач. Первым шагом в обучении решению текстовых задач методом математического моделирования могут быть использование различных видов моделей в условии текстовой задачи.

Условие задачи может быть представлено вербальной, графической, табличной или аналитической моделью.

Под вербальной моделью мы будем понимать информационную модель в мысленной или разговорной форме.

Графическая модель - изображение рисунков, схем, чертежей и т.д. Разнообразие графических моделей достаточно велико.

Одним из наиболее часто используемых типов информационных моделей является таблица, которая состоит из строк и столбцов.

Табличные модели – объекты и их свойства задачи представлены в виде списка, а их значения размещаются в ячейках прямоугольной формы. Перечень однотипных объектов размещен в первом столбце (или строке), а значения их свойств размещаются в следующих столбцах (или строках).

Аналитическое моделирование основано на неявном описании моделируемого объекта с помощью набора математических формул. Язык аналитического описания содержит следующие основные группы семантических элементов: критерий (критерии), неизвестные, данные, математические операции, ограничения.

Рассмотрим решение текстовых задач методом математического моделирования, используя различные модели представления условия.

Представим задачу в виде вербальной модели и решим ее согласно этапам метода математического моделирования.

Задача. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми равно 24 км, выехали навстречу друг другу два велосипедиста. Скорость первого, который выехал на 20 мин раньше второго, на 6 км/ч меньше скорости второго. Встретились велосипедисты на середине пути. Найдите скорость каждого велосипедиста [1].

Осуществим перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математики, то есть построим математическую модель задачи – в виде схематического рисунка 2.1.

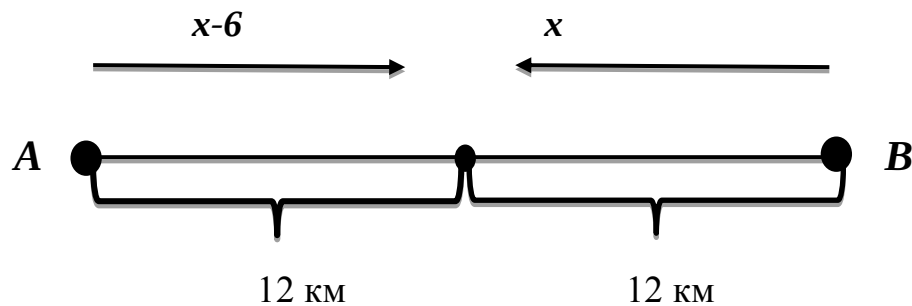


Рисунок 2.1. Схематический рисунок

Найдем зависимости и опишем их в виде аналитической модели.

Пусть x (км/ч) – скорость второго велосипедиста, тогда $(x-6)$ (км*/ч) – скорость первого велосипедиста.

$\frac{12}{x}$ (ч) время в пути второго велосипедиста, $\frac{12}{x-6}$ (ч) – время в пути первого велосипедиста.

По условию задачи известно, что первый велосипедист находится в пути до встречи на 20 мин больше второго, т.е. $\frac{12}{x-6} > \frac{12}{x}$ на $\frac{1}{3}$, поэтому составляем уравнение: $\frac{12}{x-6} - \frac{12}{x} = \frac{1}{3}$.

Теперь осуществим внутримодельное решение задачи. Полученные результаты описываются на языке математики – формулой.

$$\text{Решаем уравнение: } \frac{36x-36}{3x(x-6)} - \frac{x-6}{x(x-6)} = 0;$$

$$\frac{x^2-6x-216}{3x(x-6)} = 0;$$

$$\frac{x^2 - 6x - 216}{3x(x - 6)} = 0,$$

$$\begin{matrix} x = 18 & x = -12 \\ x(x - 6) \neq 0 & \text{или} & x(x - 6) \neq 0 \end{matrix}$$

Согласуем результаты решения с теоретическими следствиями в пределах, установленных задачей.

По смыслу задачи $x > 0$, $-12 > 0$ – неверно, $18 > 0$ – верно. Итак, 18 км/ч – скорость второго велосипедиста, $18-6=12$ (км/ч) – скорость первого велосипедиста.

Запишем ответ: 12 км/ч; 18 км/ч.

Таким образом, задачу, представленную вербальным методом, решили с помощью метода математического моделирования, а именно путем составления схематического рисунка и формул согласно этапам метода.

Следующей рассмотрим решение задачи, условие которой представлено графической моделью.

Задача. На рисунке 2.2 [10] жирными точками показана цена золота, установленная Центробанком РФ во все рабочие дни в октябре 2009 года. По горизонтали указаны числа месяца, по вертикали – цена золота в рублях за грамм. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены ломаной линией. определите по рисунку: а) какого числа цена золота поднялась выше 1000 рублей за грамм; б) сколько раз в месяц цена золота за грамм поднималась и опускалась; в) определите среднюю стоимость золота за грамм в октябре месяце.

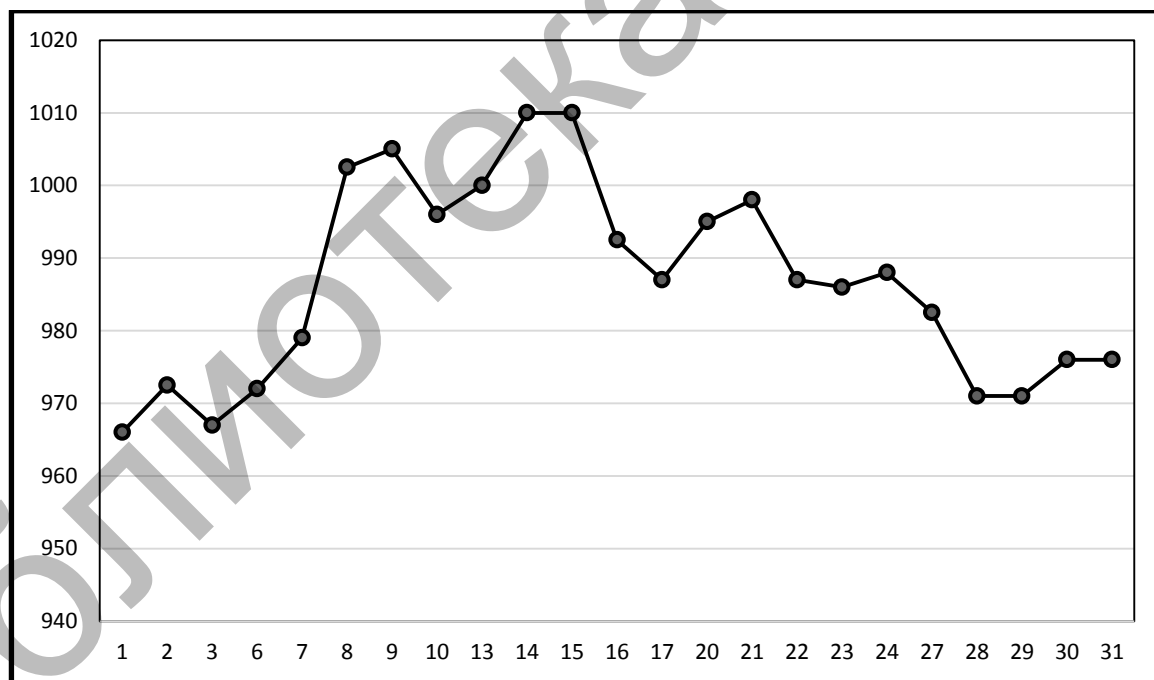


Рисунок 2.2. Цена золота за грамм в октябре месяце.

Задачи, представленные графическим методом решаются путем четкого анализа искомых показателей.

Например, чтобы ответить на вопрос под буквой а, необходимо по горизонтали найти цифру – 1000, и по вертикали отследить в какие дни этот показатель будет пересекаться с вертикальной линией. Таким образом, по

рисунку видим, что цена золота поднялась выше 1000 рублей за грамм 8 октября, затем она упала и поднялась второй раз 13 октября. Следует обратить внимание, что в таких задачах может быть несколько вариантов ответа.

Под буквой б, чтобы ответить на вопрос, нужно проанализировать наш график два раза и посчитать количество раз, когда цена поднималась и опускалась. Таким образом, цена поднималась – 6 раз, цена опускалась – 5 раз.

Под буквой в вопрос уже стоит несколько иначе, здесь уже необходимы математические вычисления. Чтобы найти среднюю стоимость золота за грамм необходимо найти сумму показателей за каждый день и разделить на количество точек, отмеченных на графике. И получим, $(967+972+968+972+978+1003+1005+998+1000+1001+1010+1010+992+988+995+998+987+986+988+983+971+971+974+976):23=23696:23=1030,26087\approx 1030$.

Таким образом, мы сумели рассмотреть различные варианты решения задач, представленных графическим методом.

Далее рассмотрим задачу, представленную табличной моделью.

Задача. В таблице 2.4 [11] приведена информация о крупнейших городах России (по данным на 2014 год). Какой из этих городов занимает восьмое место по площади? В ответе укажите численность населения этого города (в тыс. человек).

Таблице 2.4

Город	Население (в тыс. чел.)	Площадь (в кв. км)	Плотность (в чел./на кв. км)
Екатеринбург	1412	491	2866
Казань	1191	425	1560
Москва	12108	2511	4823
Нижний Новгород	1273	410	3100
Новосибирск	1548	506	3961
Омск	1166	573	1968
Ростов-на-Дону	1110	349	3167
Самара	1172	541	2164
Санкт-Петербург	5132	1439	3566
Челябинск	1169	500	2254

Для того, чтобы решить эту задачу необходимо проанализировать таблицу. В таблице приведены данные по 10 городам. Из третьего столбика

расположим числа в порядке возрастания, ограничимся первыми тремя (восьмое место в порядке убывания будет соответствовать третьему месту в порядке возрастания): 349; 410; 425. Значит, восьмое место занимает город Казань, а искомая численность равна 1191 тыс. человек.

Далее рассмотрим аналитическую модель представления текстовой задачи.

Задача. Целые числа m и n не имеют общих делителей, отличных от 1 и -1. Является ли дробь $\frac{5m-3n}{2m+5n}$ сократимой при некоторых натуральных m и n ?

Решим задачу.

Пусть $d = \text{НОД}(5m - 3n; 2m + 5n) > 1$.

Тогда справедливы равенства
$$\begin{aligned} 5m - 3n &= dk, \\ 2m + 5n &= ds \end{aligned}$$

где числа k и s взаимно просты. Значит, дробь можно сократить только на один из делителей числа d , отличный от 1. Запишем $m = \frac{5k+3s}{31}d$, $n = \frac{5s-2k}{31}d$. Отсюда $d = 31q$.

Можно рассуждать иначе. Запишем дробь в виде

$$\frac{5m-3n}{2m+5n} = 2 + \frac{1}{\frac{2m+5n}{m-13n}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{31n}{m-13n}} \quad (\text{при } m-13n \neq 0)$$

Данная дробь сократима тогда и только тогда, когда сократима дробь $\frac{31n}{m-13n}$. Но на числа m и n не имеют общих делителей, поэтому дробь может быть сокращена на число 31 или на кратное ему.

Таким образом, математическое моделирование заключается в применении моделей исследуемых систем для решения задач с использованием аналитических и имитационных методов. В процессе моделирования разрабатываются модели, проводится анализ свойств и выработка рекомендаций по изменению существующей или проектированию новой системы. Эффективность решения этих задач определяется умением применять имеющиеся методы и средства, а также разрабатывать новые для достижения поставленной цели. Такие умения приобретаются в процессе изучения

теоретических вопросов моделирования, а также в процессе решения практических задач.

2.3 Программа элективного курса «Решение текстовых задач методом математического моделирования»

Решения текстовых задач – это деятельность, сложная практически для всех обучающихся. Это определяется комплексным характером работы: вводится переменная, условие задачи записывается на математическом языке; полученный результат сопоставляется с условием задачи, по необходимости определяется значения дополнительных величин.

Условия задачи, представленное в виде математической модели позволяет учащемуся установить связь и отношение между данными и искомыми величинами. При математическом моделировании учащиеся могут увидеть идею решения задачи различными способами, доказывает выбор переменных для искомым величин.

Решение текстовых задач различными способами для школьников делает занятие интересным. Этап поиска путей решения задачи уже не предоставляет особых затруднений, становится целенаправленным и самостоятельным действием.

Пояснительная записка

Нормативно-правовые документы, на основе которых разработана рабочая программа:

- Федеральный закон Российской Федерации от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 29.12.2010 №189 (ред. от 24.11.2015) «Об

утверждении СанПин 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях» (зарегистрировано в Минюсте России 03.03.2011 г. №19993)»;

- постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 24.11.2015 №81 «О внесении изменений №3 в СанПин 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения, содержания в общеобразовательных организациях»;

- приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.12.2010 № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» с изменениями от 31 декабря 2015г. №1577.

Программа элективного курса объемом 17 часов адресована учащимся 7–9 классов. В школьном курсе алгебры умение решать текстовые задачи развивается на протяжении всего обучения в школе.

Техникой решения текстовых задач не в полной мере владеют большинство учащихся, об этом можно судить по данным аналитического отчета Федерального института педагогических измерений, в котором указано, что выполнение заданий ЕГЭ по математике, содержащих текстовую задачу, составляет около 30%.

В основной школе формируются необходимые умения для решения всех типов текстовых задач. Средством формирования обще-учебных действий, связанных с анализом текста задачи, составлением плана решения, выделением главного в условии, проверкой полученного результата и развитием речи учащихся являются текстовые задачи. В процессе решения задачи формируется действие моделирования: умение переводить текст задачи на математический язык.

При подборе задач соблюдается принцип постоянного нарастания сложности.

В изучении математики учащиеся больший интерес проявляют к истории

ее развития, что делает возможным изучение ее в элективном курсе. Большое количество задач, предлагаемых на занятиях, практической направленности. Многие задачи сложны в решении, но содержание курса позволяет ученику любого уровня включиться в учебно-познавательный процесс и проявить себя.

При решении задач необходимо учить учащихся пользоваться аналогией, индукцией, сравнениями, наблюдать, делать соответствующие выводы. Особое внимание уделяется решению задач с помощью уравнений.

Преподавание элективного курса направлено как углубленное изучение вопросов, предусмотренных программой школьного курса математики.

Основные принципы создания программы:

- **обязательная согласованность** с курсом алгебры как по содержанию, так и по последовательности изложения. Каждая тема начинается с повторения соответствующей темы курса алгебры. Элективный курс является развивающим дополнением к курсу алгебры основной школы.

- **вариативность** (сравнение различных методов и способов решения одной и той же задачи);

- **самоконтроль** (регулярный и систематический анализ своих ошибок и неудач должен быть неременным элементом самостоятельной работы учащихся).

При проведении занятий по разработанной программе на первое место выходят следующие формы организации работы: групповая, парная, индивидуальная; методы работы: частично-поисковые, эвристические, исследовательские, тренинги.

Цели данного курса: обучение решению текстовых задач методом математического моделирования.

Задачи:

1. Развитие логического мышления учащихся, развитие умений самостоятельного решения текстовых задач методом математического моделирования.

2. Развитие познавательного интереса к математике путем составления и решения текстовых задач методом математического моделирования.

3. Формирование умений строить математические модели.

Место элективного курса в учебном плане.

Курс рассчитан на 1 час в две недели. Общее количество проводимых занятий – 17 часов (таблица 2.5).

Таблица 2.5

Общее количество занятий

Наименование	Количество часов
Количество часов в неделю	0,5
Количество часов в 1 полугодие	8
Количество часов во 2 полугодие	9
Итого	17

Планируемые результаты.

Личностным результатом изучения предмета является развитие следующих умений и качеств личности учащихся:

- развитие умений ясно, точно и грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи;
- креативность мышления, общекультурное и интеллектуальное развитие, инициатива, находчивость, активность при решении математических задач;
- формирование готовности к саморазвитию, дальнейшему обучению;
- умение выстраивать конструкции (устные и письменные) с использованием математической терминологии и символики, выдвигать аргументацию, выполнять перевод текстов с обывденного языка на математический и обратно;
- стремление к самоконтролю процесса и результата деятельности;

- способность к эмоциональному восприятию математических понятий, логических рассуждений, способов решения задач, рассматриваемых проблем.

Метапредметным результатом изучения курса является развитие универсальных учебных действий (УУД) учащихся.

Регулятивные УУД:

- самостоятельно обнаруживать и формулировать учебную проблему, определять цель учебной деятельности;
- выдвигать версии решения проблемы, осознавать (и интерпретировать в случае необходимости) конечный результат, выбирать средства достижения цели из предложенных, а также искать их самостоятельно;
- составлять (индивидуально или в группе) план решения проблемы (выполнения проекта);
- сверять, работая по плану, свои действия с целью и при необходимости исправлять ошибки самостоятельно (в том числе и корректировать план);
- совершенствовать в диалоге с учителем самостоятельно выбранные критерии оценки.

Познавательные УУД:

- формировать представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, о ее значимости в развитии цивилизации;
- осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотек и Интернета;
- определять возможные источники необходимых сведений, анализировать найденную информацию и оценивать ее достоверность;
- использовать элементы компьютерных и коммуникационных технологий для достижения своих целей;
- создавать и преобразовывать различные математические модели и схемы для решения задач;

- осуществлять выбор наиболее эффективных способов решения задачи в зависимости от конкретных условий;

- анализировать, сравнивать, классифицировать и обобщать факты и явления;

- давать определения понятиям.

Коммуникативные УУД:

- самостоятельно организовывать учебное взаимодействие в группе (определять общие цели, договариваться друг с другом и т. д.);

- в дискуссии уметь выдвинуть аргументы и контраргументы;

- учиться критично относиться к своему мнению, с достоинством признавать ошибочность своего мнения и корректировать его;

- понимая позицию другого, различать в его речи: мнение (точку зрения), доказательство (аргументы), факты (гипотезы, аксиомы, теории);

- уметь взглянуть на ситуацию с иной позиции и договариваться с учащимися, придерживающимися других позиций.

Предметным результатом изучения курса является развитие следующих умений.

- уметь пользоваться основными приёмами и методами решения текстовых задач с использованием метода математического моделирования;

- уметь применять при решении текстовых задач творческую оригинальность, вырабатывать собственный метод решения;

- успешно выступать на математических соревнованиях.

Использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни для:

- решения несложных практических расчетных задач, в том числе с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора;

- устной прикидки и оценки результата вычислений; проверки результата вычисления с использованием различных приемов;

- интерпретации результатов решения задач с учетом ограничений, связанных с реальными свойствами рассматриваемых процессов и явлений.

Таблица 2.6

Учебно-тематический план

№ урока	Тема	Число уроков	Дата	
			По плану	Фактически
1	Схематизация и моделирование при решении текстовых задач	2		
2	Схематизация и моделирование при решении текстовых задач			
3	Задачи на совместную работу («на бассейны», совместное движение)	3		
4	Задачи на совместную работу («на бассейны», совместное движение)			
5	Задачи на совместную работу («на бассейны», совместное движение)			
6	Задачи на среднюю скорость движения	2		
7	Задачи на среднюю скорость движения			
8	Зачетное занятие №1	1		
9	Задачи на движение по реке	2		
10	Задачи на движение по реке			
11	Задачи на смеси	2		
12	Задачи на смеси			
10	Задачи на доли и проценты	1		
11	Зачетное занятие №2	1		
12	Линейные уравнения, сущность их решения	1		
13	Решение рациональных уравнений методом разложения на множители	1		
14	Системы уравнений	1		
15	Решение задач с помощью систем уравнений	1		
16	Обобщение и систематизация методов решения линейных и квадратных уравнений	1		
17	Итоговое занятие в форме защиты творческих портфолио	1		

Выводы по второй главе

Во второй главе приводится анализ действующих учебников алгебры 7-9 классов, входящих в федеральный комплект учебников на 2017-2018 годы следующих авторов: Ю.Н. Макарычева, Г.К. Муравина, Г.В. Дорофеева.

На наш взгляд теоретические основы метода выделены лучше в учебнике

под редакцией Г.К. Муравина. В конце каждого учебника есть «Практикум по решению задач». Задачи систематизированы («Задачи на движение», «Задачи на совместную работу»). К каждой задаче проведен четкий анализ и даны рекомендации, которые необходимо выполнить, чтобы в конечном итоге получить ответ задачи.

Для решения третьей задачи подобраны, самостоятельно составлены, прорешены задачи, условия которых представлены различными математическими моделями.

Одной из форм организации обучения, используемых нами, являются элективные курсы (курсы по выбору, обязательные для посещения), которые представляют огромный ресурс. Разработана программа элективного курса на тему «Решение текстовых задач методом математического моделирования» в количестве 17 часов, которая была частично апробирована в МБОУ ПГО «Ощепковская СОШ» на курсах по выбору для подготовки к ОГЭ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Огромную роль при подготовке к ОГЭ играет умение решать текстовые задачи. Логическую культуру, интерес к поиску решения задач формируется в процессе обучения методу математического моделирования.

Решить задачу – достаточно сложный и трудоемкий процесс для большинства школьников. Характеристикой такого процесса будет степень формирования математического развития, глубина освоения учебного материала.

Результат этих умений - новый уровень развития математики, что в первую очередь сводится не к механическому, стереотипному решению поставленных задач, а их всестороннему анализу.

Активизируется мыслительная деятельность учащихся: формируется активность, наблюдательность, находчивость, сообразительность, смекалка, развивается абстрактное мышление, умение применять теорию к решению конкретных задач.

Умение делить задачи на составные части, применять различные методы и приемы решения, составить, выполнить и проверить решение, уметь поэтапно решать задачи является важным достижением образования.

Результатом квалификационной работы является раскрытие методики обучения решению текстовых задач. Решение текстовых задач будет заключительным этапом тем школьного курса математики. Обучение школьников находить взаимосвязи между величинами, формировать аналитическую деятельность, обучая школьников переводить текста задачи на язык алгебры.

На начальном этапе обучения начать изучение методов на примере простой задачи, решенной различными методами математического моделирования.

На заключительном этапе немаловажно выделить классификацию задач по методу и содержанию решения, в результате чего учащиеся научатся самостоятельно составлять текстовые задачи и формулировать взаимно-обратные.

Правильность выбора пути решения зависит от точного определения вида задачи и целесообразности выбранных для решения вербальных, графических, табличных или аналитических моделей.

При решении текстовых задач алгебраическим способом эффективным средством обучения будет табличная форма записи условия и требования.

В процессе поиска решения сложных задач рекомендуются более динамические модели. Общая схема решения таких задач отрабатывается на простых, что в последствии облегчит решение сложных.

Результатом нашей выпускной квалификационной работы является элективный курс «Решение текстовых задач методом математического моделирования» для 7-9 классов.

Таким образом, задачи данной работы выполнены, цель достигнута.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бобровская, А. В. Математические модели в решении текстовых задач курса алгебры средней школы [Текст] / А.В. Бобровская. – Шадринск: ШГПИ, 1998. – 64 с.
2. Большой психологический словарь [Текст] / под ред.: Б.Г. Мещерякова, В.П. Зинченко. – Санкт-Петербург: Прайм-Еврознак, 2005. – 666 с.
3. Бряник. Н.В. Общие проблемы философии науки [Текст]: слов. для аспирантов и соискателей / сост. и общ. ред. Н.В. Бряник ; отв. ред. О.Н. Дьячкова. – Екатеринбург : Изд-во Урал, ун-та, 2007. – 318 с.
4. Васильева, Г.Н. Методические аспекты деятельностного подхода при обучении математике в средней школе [Текст]: практико-ориентир. монография / Г.Н. Васильева. – Пермь: Изд-во ПГГПУ, 2009. – 136 с.
5. Голяницкий, И.А. Математические модели и методы в радиосвязи [Текст] / И.А. Голяницкий; под ред. Ю.А. Громакова. – Москва: Эко-Трендз, 2005. – 440 с.
6. Дорофеев, Г.В. Алгебра [Электронный ресурс] : учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – Москва, 2010. – 256 с. – Режим доступа: <http://alleng.org/d/math/math1067.htm>. – 26.11.2018.
7. Дорофеев, Г.В. Алгебра [Электронный ресурс] : учеб. для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – Москва, 2016. – 322 с. – Режим доступа: <http://vseuchebniki.net/algebra8/1082-uchebnik-algebra-8-klass-dorofeev-suvorova-bunimovich.html>. – 26.11.2018.
8. Дорофеев, Г.В. Алгебра [Электронный ресурс] : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Г.В. Дорофеев, С.Б. Суворова, Е.А. Бунимович. – Москва, 2010. – 304 с. – Режим доступа: <http://alleng.org/d/math/math1165.htm>. –

26.11.2018.

9. Дяченко, С.И. Основные методы решения сюжетных задач и их взаимосвязь в школьном курсе математики [Текст] : учебметод.пособие для студентов 3-5 курсов физико-мат. фак. по специальности 032100 «Математика» по курсу «Теория и методика обучения математике» / С.И. Дяченко; под. ред. А.А.Илюхина. – Таганрог: Изд-во Таганрог.гос. пед. ин-та, 2004. – 72 с.

10. ЕГЭ теория, пробные и реальные КИМы ЕГЭ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.ctege.info>. – 04.10.2018.

11. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты[Текст]: 36 вариантов / И.Р. Высоцкий [и др.]; под ред. И.В. Ященко. – Москва : Национальное образование, 2017. – 256 с.

12. Емельянченков, Е.П. Системы компьютерной математики и их приложения. [Текст] / Е.П. Емельянченков. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 2003. – С. 148-151.

13. Зайцева, С.А. Моделирование простых текстовых задач [Текст] / С.А. Зайцева, И. И. Целищева. – Москва : Чистые пруды, 2005.– 30 с.

14. Змеев, С.И. Основы андрагогики[Текст]: учеб.пособие для вузов / С.И. Змеев. – Москва : Флинта, 1999. – 152 с.

15. Иванова, Т.А. Технология обучения школьников решению математических задач [Текст] / Т.А. Иванова // Задачи в обучении математике: теория, опыт, инновации : материалы Всерос. науч.-практ.конф., посвященной 115-летию член.-корр. АПН СССР П.А. Ларичева. – Вологда: Русь, 2007. – С. 246.

16. Киселева, О.М. Применение математических методов в педагогике[Текст]/ О.М. Киселева, Н.М. Тимофеева //Системы компьютерной математики и их приложения. – Смоленск: Изд-во СГПУ, 2006. – С. 182-184.

17. Киселева, О.М. Применение методов математического моделирования в педагогике [Текст] / О.М. Киселева, Г.Е. Сенькина // Вестник Поморского университета. – 2007. – № 3. – С. 32-36.

18. Краевский, В.В. Воспитание или образование[Текст] / В.В. Краевский //Педагогика. – 2001. – №3. – С.3.
19. Курсы и подготовка к ЕГЭ по математике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://ege.mggu-sh.ru>. – 5.10.2018.
20. Ларин, А.А. Математика. Репетитор [Электронный ресурс] / А.А. Ларин. – Режим доступа:<http://alexlarin.net>. – 05.10.2018.
21. Ложкина, Е.М. Методологические основы изучения понятия "математическая модель" в курсе алгебры основной школы [Электронный ресурс] / Е.М. Ложкина // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. – 2008. – №70-2. – Доступ с сайта НЭБ КиберЛенинка. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodologicheskie-osnovy-izucheniya-ponyatiya-matematicheskaya-model-v-kurse-algebry-osnovnoy-shkoly>. – 24.09.2018.
22. Макарычев Ю.Н. Алгебра [Текст] : учеб.для 7кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков ; ред. С.А. Теляковский. – 5-е изд. – Москва : Просвещение, 1997. – 240 с.
23. Макарычев Ю.Н. Алгебра [Текст] : учеб.для 8 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков; ред. С.А. Теляковский. – 7-е изд. – Москва : Просвещение, 1988. – 256 с.
24. Макарычев Ю.Н. Алгебра [Текст] : учеб.для 9 кл. общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков ; ред. С.А. Теляковский. – 5-е изд. – Москва : Просвещение, 1999. – 272 с.
25. Маликов, Р.Ф. Основы математического моделирования [Текст]: учеб.пособие / Р.Ф. Маликов. – Москва: Телеком, 2010. – 368 с.
26. Медоуз, Д.Х. Азбука системного мышления[Текст] / Д.Х Медоуз. – Москва: БИНОМ, 2010. – 343 с.
27. Методика и технология обучения математике [Текст]: курс лекций / Н.Л. Стефанова[и др.]; под науч. ред. Н.Л. Стефановой, Н.С. Подходовой. – Москва : Дрофа, 2005. – 416 с.
28. Моисеев, Н.Н. Математические модели экономической науки [Текст] /

Н.Н. Моисеев. – Москва : Знание, 1973. – 63 с.

29. Муравин, К.С. Алгебра. 7 класс [Текст] : учеб.для общеобразоват. учеб. заведений / К.С. Муравин, Г.К. Муравин, Г.В. Дорофеев. – Москва: Дрофа, 1998. – 240 с.

30. Муравин, К.С. Алгебра. 8 класс [Текст] : учеб.для общеобразоват. учеб. заведений / К.С. Муравин, Г.К. Муравин, Г.В. Дорофеев. – 3-е изд. – Москва : Дрофа, 2000. – 208 с.

31. Муравин, К.С. Алгебра. 9 класс [Текст] : учеб.для общеобразоват. учеб. заведений / К.С. Муравин, Г.К. Муравин, Г.В. Дорофеев. – Москва : Дрофа, 2000. – 238 с.

32. Открытый банк заданий по математике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://mathege.ru>. – 5.10.2018.

33. Официальный информационный портал ЕГЭ [Электронный ресурс]. – Режим доступа:<http://ege.edu.ru>. – 01.10.2018.

34. Петрова, Е.С. Теория и методика обучения математике [Текст]: учеб.-метод. пособие для студентов. мат. спец. / Е. С. Петрова. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. – 84 с.

35. Решу ЕГЭ образовательный портал для подготовки к экзаменам [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://reshuege.ru>. – 02.10.2018.

36. Российская Федерация. Министерство образования и науки. Об утверждении ФГОС основного общего образования [Текст]: приказ от 17.12.2010 № 1897 (зарег. в Минюсте России 01.02.2011, рег. № 19644) (с изм. и доп. от 29.12.2014 г.) (с приложениями)// Официальные документы в образовании. – 2015. – № 11. – С.5-60.

37. Российская Федерация. Министерство образования и науки. Об утверждении федерального перечня учебников, рекомендованных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования[Электронный ресурс]:приказ от 31 марта 2014 г. № 253. –

Режим доступа: 12.05.2018.

38. Саранцев, Г.И. Методика обучения математике в средней школе[Текст]: учеб.пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г.И. Саранцев. – Москва: Просвещение, 2002. – 223 с.

39. Стёпин. В.С. Моделирование[Электронный ресурс] / В.С. Стёпин, Г.Б. Гутнер. Ф.И. Голдберг// Гуманитарные технологии :аналит. портал. – Режим доступа: <https://gtmarket.ru/concepts/7025>. – 26.10.2018.

40. Теория и технология обучения математике в средней школе [Текст]: учеб.пособие для студентов мат. спец. пед. вузов / Т.А. Иванова, Е.Н. Перевощикова, Л.И. Кузнецова и Т.П. Григорьева; под ред. Т.А. Иванова. – 2-е изд. – Н. Новгород: НГПУ, 2009. – 355 с.

41. Уемов, А.И. Логические основы метода моделирования[Текст] / А.И. Уемов. – Москва: Мысль, 1971. – 311 с.

42. Фридман, Л.М. Наглядность и моделирование в обучении [Текст] / Л.М. Фридман. – Москва: Знание, 1984. – 80 с.

43. Фридман, Л.М. Основы проблемологии[Текст] / Л.М. Фридман. – Москва:Синтег, 2001. – 228 с.

44. Штофф, В.А. Моделирование и философия / В.А. Штофф. – Москва: Наука, 1966. – 301 с.