

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Шадринский государственный педагогический университет»
Факультет информатики, математики и физики
Кафедра физико-математического и информационно-технологического образования

**ОБУЧЕНИЕ УЧАЩИХСЯ ОТБОРУ КОРНЕЙ
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАМКАХ ПОДГОТОВКИ К
ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ**

Выпускная квалификационная работа
по образовательной программе 44.03.05 Педагогическое образование
(с двумя профилями подготовки)
(профиль «Информатика», профиль «Математика»)
квалификация – бакалавр

вид – выпускная квалификационная работа опытно-практического характера
формат – исследовательская работа

Исполнитель:

Москалева Софья Андреевна
студент 850 группы
заочная форма обучения

Руководитель ВКР:

канд. пед. наук, доцент
Пермякова Марина Юрьевна

Нормоконтролер

Пермякова Марина Юрьевна
Оригинальность ...%

Рецензент

Шадринск, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОТБОРУ КОРНЕЙ В РАШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАМКАХ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ	6
1.1. Структура и содержание ЕГЭ по математике	6
1.2. Тригонометрические уравнения и методы их решения	11
1.3. Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений	20
ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОТБОРУ КОРНЕЙ В РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	24
2.1. Анализ учебников алгебры и открытого банка заданий на предмет решения тригонометрических уравнений	24
2.2. Методические рекомендации по обучению геометрическому методу отбора корней в решении тригонометрических уравнений	29
2.3. Разработка программы элективного курса по подготовке к ЕГЭ «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений»	45
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	52
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	54
ПРИЛОЖЕНИЕ	61

ВВЕДЕНИЕ

Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования (ФГОС) среди предметных результатов освоения базового курса математики выделяет владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем.

Задания на решение тригонометрических уравнений включены в содержание ЕГЭ по математике и имеют повышенный уровень сложности. Из аналитического отчета Федерального института педагогических измерений (ФИПИ) видно, что многие учащиеся не приступают к выполнению таких заданий, а из приступивших не все достигают нужного результата. В 2018 году правильно выполнили это задание лишь 28,7 % выпускников.

Методическим аспектам решения тригонометрических уравнений в своих исследованиях уделяли внимание И. К. Андронов, А. К. Окунев, К. Я. Хабибуллин, С. А. Шестаков, П. И. Захаров, Н. Г. Чанилова. Методы решения тригонометрических уравнений и неравенств рассмотрены в работах В. А. Далингера, О. И. Чикуновой, А. Г. Корянова и А. А. Прокофьева.

При выполнении тринадцатого задания ЕГЭ по математике возникает довольно трудный для учащихся вопрос отбора корней в решении тригонометрических уравнений, связанный с областью определения и другими дополнительными условиями. Методам отбора корней и их выбору в каждом конкретном случае в школьных учебниках по математике уделяется недостаточно внимания.

Таким образом, возникает противоречие между реальными требованиями ЕГЭ по математике, количеством часов, отводимых на изучение данной темы и недостаточным учебно-методическим обеспечением процесса обучения математике в школе.

Необходимость разрешения сформулированного противоречия обуславливает *актуальность* настоящего исследования и определяет его *проблему*: как научить учащихся отбору корней в решении тригонометрических уравнений?

В рамках решения данной проблемы была определена тема исследования «Обучение учащихся отбору корней тригонометрических уравнений в рамках подготовки к ЕГЭ по математике».

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся средней школы.

Предмет исследования: обучение учащихся средней школы отбору корней в решении тригонометрических уравнений.

Цель исследования: теоретическое обоснование и разработка элективного курса для учащихся 10-11 классов «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений», направленного на подготовку учащихся к ЕГЭ по математике.

В соответствии с поставленной целью сформулированы следующие *задачи исследования*.

1. Изучить и кратко изложить теоретические вопросы, связанные с отбором корней в решении тригонометрических уравнений.
2. Проанализировать учебники алгебры и начал анализа, открытый банк заданий ЕГЭ по математике на предмет решения тригонометрических уравнений и отбора корней в их решении.
3. Подобрать, самостоятельно составить, систематизировать и решить задания на отбор корней в решении тригонометрических уравнений геометрическим методом.
4. Разработать программу элективного курса «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений», направленного на подготовку учащихся 10-11 классов к единому государственному экзамену по математике.

Для решения поставленных частных задач использовались следующие **методы исследования**: изучение и анализ психолого-педагогической, научно-методической литературы: учебников, учебных программ, государственного образовательного стандарта, материалов Интернет, учебных пособий и пособий для учителя, сборников задач; классификация и систематизация имеющихся в учебных пособиях заданий; самостоятельное составление задач.

Практическая значимость исследования заключается в том, что теоретические результаты доведены до уровня практического применения. Разработаны и частично внедрены в учебный процесс:

- методические материалы по обучению учащихся геометрическому методу отбора корней в решении тригонометрических уравнений;
- программа элективного курса «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений», направленного на подготовку учащихся к ЕГЭ по математике.

Результаты исследования нашли свое отражение в научных статьях: «О некоторых методах отбора корней тригонометрических уравнений», «Алгебраический метод отбора корней в решении тригонометрических уравнений».

Структура исследования: выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, шести параграфов, заключения, списка использованных источников и двух приложений. Общий объем составляет 53 страницы.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОТБОРУ КОРНЕЙ В РАШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАМКАХ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

1.1. Структура и содержание ЕГЭ по математике

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике введен в Российской Федерации как форма итоговой аттестации выпускников в 2008 году, в отдельных регионах экспериментальная работа была начата уже в 2001 году. Основными целями введения ЕГЭ были совмещение выпускного экзамена за курс средней школы со вступительным экзаменом в вуз для снижения психологической и физической нагрузки на старшеклассников и минимизирование коррупционной составляющей экзаменов.

ЕГЭ является формой объективной оценки качества подготовки учащихся, освоивших образовательные программы среднего общего образования, с использованием заданий стандартизированной формы (контрольных измерительных материалов). ЕГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

В 2013 году распоряжением Правительства РФ от 24.12.2013 № 2506-р, принятым в соответствии с Указом Президента РФ от 07.05.2012 «О мерах по реализации государственной политики в области образования и науки», утверждена Концепция развития математического образования в Российской Федерации[19]. Этот документ является основополагающим и определяет базовые принципы, цели, задачи и основные направления математического

образования в России. В число мер по реализации Концепции, принятых приказом Министерством образования и науки России от 03.04.2014 № 256, входит «совершенствование системы государственной итоговой аттестации, завершающей освоение основных образовательных программ основного общего и среднего образования по математике».

Для осуществления качественной оценки освоения образовательных программ по математике необходима, прежде всего, разработка соответствующих контрольно-измерительных материалов (КИМ), предназначенных для различных целевых групп выпускников. Следует отметить, что содержание контрольно-измерительных материалов ЕГЭ за прошедшие годы неоднократно изменялось в лучшую сторону и в настоящее время охватывает материал всего курса математики, как основной, так и средней школы [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**].

На основе Федерального компонента государственного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования (приказ Минобрнауки России от 05.03. 2004 № 1089) определяется содержание экзаменационной работы.

Структуру и содержание контрольно-измерительных материалов (КИМ) по математике регламентируют кодификатор [21], составленный на основе обязательного минимума содержания общего полного и основного образования, а также спецификация, в которой в краткой форме указаны основные характеристики КИМ.

Кодификатор элементов содержания включает 6 разделов школьного курса математики: алгебра; уравнения и неравенства; функции; начала математического анализа; геометрия; элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей.

В раздел «Алгебра» входят такие элементы как, числа, корни и степени; основы тригонометрии; логарифмы; преобразования выражений.

Раздел «Функции» состоит из следующих элементов: определение и график функции; элементарное исследование функций; основные элементарные функции.

В раздел «Начала математического анализа» включены: производная; исследование функции; первообразная и интеграл.

В разделе «Геометрия» выделяют планиметрию; прямые и плоскости в пространстве; многогранники; тела и поверхности вращения; измерение геометрических величин; координаты и векторы.

Контрольные измерительные материалы позволяют установить уровень освоения выпускниками Федерального компонента государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования.

С 2015 года ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях – базовом и профильном.

Экзаменационная работа базового уровня сложности состоит из одной части, включающей 20 заданий с кратким ответом, которые направлены на проверку освоения базовых умений и практических навыков применения математических знаний в повседневных ситуациях. Ответом к каждому из заданий является целое число или конечная десятичная дробь, или последовательность цифр.

В КИМах базового уровня представлены задания, проверяющие следующий учебный материал:

- 1) математика, 5-6 классы;
- 2) алгебра, 7-9 классы;
- 3) алгебра и начала анализа, 10-11 классы;
- 4) теория вероятностей и статистика, 7-9 классы;
- 5) геометрия, 7-11 классы.

В экзаменационной работе базового уровня сложности задания распределены по содержательным разделам курса математики: алгебра (10);

уравнения и неравенства (3); функции (1); начала математического анализа (1); геометрия (4); элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей (1).

КИМы профильного уровня содержат 19 заданий, разделенных на две части. В первой части выделены восемь заданий (1-8) базового уровня сложности с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби, которые проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, умение анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В эту часть работы включены задания по всем основным разделам курса математики: алгебра, начала математического анализа, геометрия (планиметрия и стереометрия), теория вероятностей и статистика.

Во второй части выделены четыре задания (9-12) повышенного уровня сложности с кратким ответом и семь заданий повышенного (13-17) и высокого (18, 19) уровней сложности с развернутым ответом. Задания этой части проверяют освоение учебного материала по алгебре (7–9 классы), алгебре и началам анализа (10–11 классы) и геометрии (7–11 классы).

Задания по решению тригонометрических уравнений в ЕГЭ по математике базового уровня не содержатся, а в ЕГЭ профильного уровня такое задание представлено под номером 13.

Ежегодно по результатам ЕГЭ Федеральный институт педагогических измерений приводит аналитический отчет, приложением к которому является таблица основных характеристик экзаменационной работы с указанием проверяемых требований в заданиях и среднего процента выполнения учащимися [Табл.1].

Из представленной характеристики видно, что с заданиями первой части и повышенного уровня сложности второй части большинство учащихся справились (47,9 - 95,9 %), но начиная с заданий высокого уровня сложности, показатель среднего процента выполнения резко падает (1,2 – 28,7 %). Среди

заданий с развернутым ответом наибольшее количество полных баллов получено по заданиям 13 и 15: решение тригонометрических уравнений и логарифмических неравенств. Однако показатель 28,7 % за выполнение задания по решению тригонометрического уравнения по сравнению с результатами прошлого года (31,9 %) снизился.

Таблица 1

Результаты выполнения заданий ЕГЭ по математике
(профильный уровень) 2018 года

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки	Коды проверяемых элементов содержания	Средний процент выполнения
1	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	93,3%
2	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	3.1, 6.2	3.1-3.3, 6.2.1	95,9%
3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1	5.1, 5.5	87,2%
4	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3	87,5%
5	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1	93,4%
6	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2	5.1.1-5.1.4, 5.5.1-5.5.5	78,2%
7	Уметь выполнять действия с функциями	3.1-3.3	4.1-4.3	47,9%
8	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2	5.2-5.5	52,8%
9	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1-1.3	1.1-1.4	89,7%
10	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1-6.3	2.1, 2.2	66,9%
11	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	2.1, 2.2	61,2%
12	Уметь выполнять действия с функциями	3.2, 3.3	4.1, 4.2	44,2%
13	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1-2.3	2.1, 2.2	28,7%

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки	Коды проверяемых элементов содержания	Средний процент выполнения
14	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2-5.6	9,4%
15	Умение решать уравнения и неравенства	2.3	2.1, 2.2	12,6%
16	Умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2, 5.3	5.2-5.6	3,6%
17	Уметь использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1.1, 1.1.3, 2.1.12	2,2%
18	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1-2.3, 5.1	2.1, 2.2, 3.2, 3.3	1,2%
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 5.3	1.1-1.4	2,5%

Выполнение тринадцатого задания ЕГЭ по математике профильного уровня требует отбора корней в решении тригонометрических уравнений, кроме применения методов решения тригонометрических уравнений учащиеся должны уметь осуществлять отбор корней. Если учащиеся владеют методами отбора, то у них появляются дополнительные возможности для набора еще одного балла даже при вычислительной ошибке в решении тригонометрического уравнения.

1.2. Тригонометрические уравнения и методы их решения

Современными вузами предъявляются достаточно высокие требования к математической подготовке абитуриентов и студентов, в связи с чем, старшеклассники стремятся к набору максимально возможного количества баллов при решении ЕГЭ по математике. Для этого необходимо верно

выполнить все задания профильного уровня, в число которых входят задания на решение тригонометрических уравнений и отбор корней в их решении.

Рассмотрим различные подходы к понятию тригонометрического уравнения.

Под тригонометрическим уравнением И. К. Андронов и А. К. Окунев понимают уравнение, в котором: 1) неизвестные содержатся только под знаками круговых функций; 2) аргументами круговых функций являются линейные функции от неизвестных; 3) над круговыми функциями выполняются только алгебраические операции [5].

В учебниках А.Г. Мордковича под тригонометрическими уравнениями понимают уравнения, в которых переменная содержится под знаками тригонометрических функций [31, 33].

В работах Н. Г. Чаниловой приводится следующее понятие тригонометрического уравнения: «Тригонометрическим уравнением называют уравнение, в котором неизвестное (переменная) входит только под знак тригонометрической функции непосредственно или в виде функции неизвестного, причем над тригонометрическими функциями выполняются только алгебраические действия» [48].

Все тригонометрические уравнения решаются сведением к одному из четырех простейших:

$$1) \quad \sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ если } |a| \leq 1, \\ \text{не имеет решения, если } |a| > 1; \end{cases}$$

$$2) \quad \cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ если } |a| \leq 1, \\ \text{не имеет решения, если } |a| > 1; \end{cases}$$

$$3) \quad \operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$4) \quad \operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Выделяют следующие аналитические методы решения тригонометрических уравнений.

1. Решение простейших тригонометрических уравнений

Пример 1. Решить уравнение: $\sin \pi \sqrt{x} = -1$.

Имеем $\pi \sqrt{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$\sqrt{x} = -\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$. Для нахождения x следует возвести обе части последнего равенства в квадрат, но при этом обе части данного равенства должны быть неотрицательны. По свойству арифметического квадратного корня левая часть этого равенства неотрицательна; правая часть принимает положительные значения при $k \in \mathbb{N}$.

Итак, имеем $x = \left(-\frac{1}{2} + 2k\right)^2, k \in \mathbb{N}$.

2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители и способом группировки.

Путем группировки слагаемых уравнение приводят к виду, когда левая часть разложена на множители, а правая часть равна нулю. Уравнение распадается на несколько более простых уравнений.

Пример 2. Решить уравнение: $\sin 2x + 2 \sin x = \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3}$.

$$2 \sin x \cos x + 2 \sin x - \sqrt{3} \cos x - \sqrt{3} = 0$$

$$2 \sin x (\cos x + 1) - \sqrt{3} (\cos x + 1) = 0$$

$$(2 \sin x - \sqrt{3})(\cos x + 1) = 0.$$

В результате необходимо решить два простых уравнения $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ и $\cos x + 1 = 0$.

3. Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратному уравнению.

Пример 3. Решить уравнение: $6 \sin^2 x - \cos x + 6 = 0$.

Используя основное тригонометрическое тождество, приводят это уравнение к уравнению, содержащему только одну функцию. Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, данное уравнение запишется в виде $6(1 - \cos^2 x) - \cos x + 6 = 0$.

После простейших преобразований получают уравнение $6\cos^2 x + \cos x - 12 = 0$, которое решают способом замены $\cos x = t, |t| \leq 1$.

4. Решение однородных тригонометрических уравнений.

Однородными тригонометрическими уравнениями степени n относительно функций $\sin \alpha x$ и $\cos \alpha x$ называют уравнения вида: $a_0 \sin^n \alpha x + a_1 \sin^{n-1} \alpha x \cos \alpha x + a_2 \sin^{n-2} \alpha x \cos^2 \alpha x + \dots + a_{n-1} \sin \alpha x \cos^{n-1} \alpha x + a_n \cos^n \alpha x = 0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ - действительные числа [18].

Пример 4. Решить уравнение: $12\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 2$.

$$10\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0.$$

Значения x , при которых $\cos x$ обращается в нуль, не являются корнями последнего уравнения. Действительно, подставив в него $\cos x = 0$, будем иметь $10\sin^2 x = 0$, откуда $\sin x = 0$, а это противоречит тому, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Значит $\cos x \neq 0$ и можно поделить последнее уравнение на $\cos^2 x$. Получим $10\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 4 = 0$. Решив данное уравнение, введя подстановку, и получив квадратное уравнение, получают уравнение $\operatorname{tg} x = -1$ и $\operatorname{tg} x = \frac{2}{5}$, затем находят $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, $x = \operatorname{arctg} \frac{2}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

5. Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение.

Для их решения используются следующие тригонометрические формулы:

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}. \end{aligned}$$

Пример 5. Решить уравнение: $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Применим формулу преобразования суммы синусов в произведение,

$$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) \cos \frac{\pi}{8} = 0, \text{ откуда } \sin\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = 0, \quad x = -\frac{\pi}{8} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

6. Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента.

В данном методе некоторую величину представляют как тригонометрическую функцию соответствующего аргумента α , а затем производят тригонометрические преобразования.

$$a \cos x + b \sin x = c, \text{ где } a^2 + b^2 \neq 0.$$

Разделив левую и правую часть исходного уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$, будем иметь $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, то существует угол α такой $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, при этом $\alpha = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (или $\alpha = \arccos \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$).

Тогда исходное уравнение примет вид $\sin x \cos \alpha + \cos x \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, откуда $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Решение последнего уравнения будет

$$x + \alpha = (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x = -\arccos \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 6. Решить уравнение: $15 \cos 2x - 8 \sin 2x = 8,5$.

Почленно разделим на 17 $\left(7 = \sqrt{15^2 + 8^2}\right)$: $\frac{15}{17} \cos 2x - \frac{8}{17} \sin 2x = \frac{1}{2}$. Водим дополнительный угол α , такой, что $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\sin \alpha = \frac{8}{17}$. Это возможно только потому, что $\left(\frac{15}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 = 1$. Тогда $\cos \alpha \cos 2x - \sin \alpha \sin 2x = \frac{1}{2}$;

$$\cos(x + \alpha) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x + \alpha = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \text{ Ответ: } \pm \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \arccos \frac{15}{17} + \pi n, n \in \mathbb{Z} [26].$$

7. Решение уравнений преобразованием произведения

Для их решения используются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)];$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)];$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)].$$

Пример 7. Решить уравнение: $\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0$.

Применив формулу преобразования произведения синусов в сумму, получаем

$$\cos 3x + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \cos 3x = 0, \quad \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x = 0, \quad 2 \cos 2x \cos x = 0,$$

$$\cos 2x = 0 \text{ или } \cos x = 0,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{ИЛИ} \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

8. Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени.

Для их решения используются следующие тригонометрические формулы:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Данный метод применяют, если тригонометрическое уравнение содержит $\sin x, \cos x$ в четной степени

Пример 8. Решить уравнение: $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

Воспользуемся формулами понижения степени и подстановкой $y = \cos 2x$. Имеем:

$$4\sin^4 x = 4(\sin^2 x)^2 = 4(-\cos 2x)^2 = 4(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) = 4 - 8\cos 2x + 4\cos^2 2x$$

$$8\cos^6 x = (\cos^2 x)^3 = (+\cos 2x)^3 = 1 + 3y + 3y^2 + y^3.$$

Получаем уравнение $y^2 + 2y + 4 = 0$. Отсюда $y = 0$, или $\cos 2x = 0$ [26].

9. Решение тригонометрических уравнений путем домножения на некоторую тригонометрическую функцию.

Следует учитывать, что в результате использования данного метода возможно появление посторонний корней.

Пример 9. Решить уравнение: $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Домножив левую и правую части исходного уравнения на $\sin \frac{x}{2}$ и применив формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, получаем $\frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{5x}{2} - \cos \frac{7x}{2} \right) =$
 $= \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{5x}{2} + \sin \frac{7x}{2} \right).$

$$\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{7x}{2} = \sin \frac{7x}{2} - \sin \frac{x}{2}, \quad 2 \sin \frac{3x}{2} \sin 2x = 2 \sin \frac{3x}{2} \cos 2x,$$

$$\sin \frac{3x}{2} (\sin 2x - \cos 2x) = 0, \text{ откуда } \sin \frac{3x}{2} = 0 \text{ или } \sin 2x - \cos 2x = 0,$$

$$\sin \frac{3x}{2} = 0 \text{ или } \operatorname{tg} 2x = 1,$$

$$x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Так как корни уравнения $\sin \frac{x}{2} = 0$ не являются корнями исходного уравнения, то из полученных множеств решений следует исключить $x = 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$. Значит во множестве $x = \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ нужно исключить $n = 3l$.

$$x = \frac{2\pi n}{3}, n \neq 3l, n \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

10. Решение тригонометрических уравнений вида

$$P(\sin x \pm \cos x; \sin x \cdot \cos x) = 0, \text{ где } P(y, z) - \text{многочлен.}$$

Уравнения вида $P(\sin x \pm \cos x; \sin x \cdot \cos x) = 0$, где $P(y, z)$ – многочлен, решаются с помощью замен неизвестных $\sin x + \cos x = u$, откуда

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = u^2, \quad 1 + 2 \sin x \cos x = u^2, \quad \sin x \cos x = \frac{u^2 - 1}{2}. \quad \text{Если}$$

$$\sin x - \cos x = v, \text{ то } \sin x \cos x = \frac{1 - v^2}{2}.$$

Пример 10. Решить уравнение: $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

Сделав замену $\sin x - \cos x = v$, $\sin x \cos x = \frac{1 - v^2}{2}$, получаем уравнение $1 - v^2 + 12v + 12 = 0$, откуда $v_1 = 1$, $v_2 = -13$. Тогда исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $\sin x - \cos x = 1$ или $\sin x - \cos x = -13$. Первое уравнение легко свести к уравнению вида $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, которое имеет решения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение решений не имеет, так как $|\sin x - \cos x| \leq \sqrt{2}$.

11. Решение тригонометрических уравнений методом универсальной подстановки [18, 23, 38].

Рациональное уравнение $R(\sin x, \cos x) = 0$ с помощью тригонометрической подстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ приводится к рациональному уравнению $R_1(t) = 0$ относительно новой неизвестной t . В этом случае используются следующие формулы:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

Использование приведенных выше формул может приводить к сужению области определения уравнения, поскольку $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ не определен при

$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, поэтому в таких случаях нужно проверять, являются ли углы $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ корнями исходного уравнения.

Пример 11. Решить уравнение: $\cos x + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$.

Выполним подстановку $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. Получаем $\frac{1-t^2}{1+t^2} + t = 1$. Это уравнение равносильно уравнению $t^3 - 2t^2 + t = 0$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Имеем два уравнения $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$ и $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$. Первое уравнение имеет корни $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Второе уравнение имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Заметим, что значения $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, не являются корнями исходного уравнения.

12. Метод оценок.

Некоторые тригонометрические уравнения удастся решить, используя неравенства $-1 \leq \sin x \leq 1$ и $-1 \leq \cos x \leq 1$ верные для всех x [23].

Пример 12. Решить уравнение: $1 + \cos 4x = \frac{2}{\sin x}$.

Для левой части уравнения справедливы оценки $0 \leq 1 + \cos 4x \leq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$; для правой части: $\frac{2}{\sin x} \geq 2$ для всех $x \in \mathbb{R}$, таких, что $\sin x > 0$.

Если $\sin x < 0$, то и $\frac{2}{\sin x} < 0$, а выражение в левой части $(1 + \cos 4x) \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому при $x \in (\pi + 2k\pi; 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, уравнение не имеет решения.

Отсюда следует, что если решение x уравнения существует, то одновременно должны выполняться равенства:

$$\begin{cases} 1 + \cos 4x = 2, \\ \frac{2}{\sin x} = 2. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что в данном случае такие x существуют и $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ [36].

Для тригонометрических уравнений не существует единого метода решения. В каждом конкретном случае успех определяется знанием

тригонометрических формул и навыками решения простейших уравнений [23].

1.3. Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений

При решении тригонометрических уравнений в рамках ЕГЭ по математике возникает вопрос отбора корней, оговоренный в условии или диктуемый дополнительными ограничениями: знаменатель дроби не равен нулю, выражение под знаком корня четной степени не отрицательно, выражение под знаком логарифма положительно.

В процессе отбора корней при решении тригонометрических уравнений используются различные методы: арифметический, алгебраический, геометрический и функционально-графический. Рассмотрим подробнее каждый из них.

Арифметический метод отбора корней заключается в непосредственной подстановке полученных корней в уравнение и имеющиеся ограничения либо в переборе целочисленного параметра и вычислении корней. Перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней приходится выполнять в случаях, когда требуется отобрать корни, принадлежащие заданному промежутку или удовлетворяющие некоторому условию.

В случае, когда одна из серий решений имеет вид $x = x_0 + \frac{2\pi k}{m}, k \in Z, m$ – заданное натуральное число, и необходимо проверить выполнение дополнительного условия, то эту серию удобно разбить на серии с периодом

2π . Получится m серий, при $k=1,2,\dots,m$. Соответственно, остается проверить выполнение условий только для одного числа из каждой такой серии.

Решить уравнение: $\sin 3x(\sqrt{\cos x} - 2) = 0$. Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$. Так как периоды функций $T(\cos x) = 2\pi$, $T(\sin 3x) = \frac{2\pi}{3}$, то их общий наименьший положительный период 2π . Поэтому достаточно рассмотреть решения уравнения на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$.

Из уравнения $\sin 3x = 0$ получаем $x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Подставляя поочередно значения $0, 1, 2, 3, 4, 5$ для переменной k , найдем корни $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$, содержащиеся на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$. Среди полученных решений отбираем те, для которых справедливо неравенство $\cos x \geq 0$. Остаются числа $0, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. Следовательно, исходное уравнение имеет корни вида $x = \pi n, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Алгебраический метод отбора корней включает решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней, либо исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.

Найти все решения уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

Приведем уравнение к виду $\cos x(\sin x - 1) = 0$. Отсюда получаем: $\cos x = 0$ и $\sin x = \frac{1}{2}$. Решение первого уравнения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Так как решения должны удовлетворять неравенству $-\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{3\pi}{4}$, то сократив на π ,

получаем: $-1 \leq \frac{1}{2} + n \leq \frac{3}{4}$ или $-\frac{3}{2} \leq n \leq \frac{1}{4}$. С учетом того, что $n \in \mathbb{Z}$, получаем два значения: $n = -1$ и $n = 0$. Если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2}$, если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2}$.

Решение второго уравнения $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$. Так как должно

выполняться условие $-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$, то для первой серии имеем:

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{6} + 2n \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq n \leq \frac{7}{24} \Leftrightarrow n = 0. \text{ Отсюда получаем: } x = \frac{\pi}{6}.$$

Для второй серии имеем:

$$-\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow -1 \leq \frac{5}{6} + 2n \leq \frac{3}{4} \Leftrightarrow -\frac{11}{12} \leq n \leq -\frac{1}{24}. \text{ Последнее неравенство не}$$

имеет целочисленных решений.

Ответ: $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$.

Геометрический метод отбора корней заключается в изображении корней на тригонометрической окружности или на числовой прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

Тригонометрическую окружность удобно использовать для изображения точек вида $\alpha + \beta n, n \in \mathbb{Z}$, где $2\pi \div \beta$ - натуральное число.

Например, множеству чисел $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}n, n \in \mathbb{Z}$ на окружности соответствуют

$2\pi \div \frac{\pi}{3} = 6$ точек. С другой стороны, числа вида $\frac{1}{4} + 3n, n \in \mathbb{Z}$ целесообразнее

отмечать на координатной прямой, так как число 2π не соизмеримо с числом 3, и на окружности будет бесконечное множество точек. Еще одна причина выбора числовой прямой связана с периодами функций, превосходящих 2π .

Например, числа $\frac{\pi}{4} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$, будут изображаться точкой $P_{\frac{\pi}{4}}$, но число,

например $\frac{\pi}{4} + 2\pi$, которому также соответствует точка $P_{\frac{\pi}{4}}$, не входит в

рассматриваемое множество чисел.

В функционально-графическом методе производят выбор корней с помощью графика простейшей тригонометрической функции. Данный метод применяется при изображении решений тригонометрических уравнений с дополнительным условием, заданным простейшим неравенством.

Для обеспечения необходимого уровня подготовки выпускников к ЕГЭ по математике и возможности выполнения ими заданий, содержащих решение тригонометрических уравнений с отбором корней, достаточно познакомить учащихся с основными методами отбора, обратив внимание на выбор наиболее рационального из них для каждого конкретного случая.

Выводы по первой главе:

В ходе изучения методико-математической литературы рассмотрены и кратко изложены теоретические вопросы, связанные с отбором корней в решении тригонометрических уравнений, в частности определено понятие тригонометрического уравнения и выделены аналитические методы их решения с примерами решенных уравнений на каждый метод. Также рассмотрены четыре метода отбора корней в решении тригонометрических уравнений.

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ ОТБОРУ КОРНЕЙ В РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Анализ учебников алгебры и открытого банка заданий на предмет решения тригонометрических уравнений

Тригонометрия традиционно является одной из важнейших составных частей школьного курса математики, а решение тригонометрических уравнений стоит особняком в содержательно-методической линии их изучения. Анализ школьных учебников по математике в полной мере отражает место данного вида уравнений в школьном курсе математики.

В Федеральный перечень учебников алгебры, рекомендуемых к использованию в 2017-2018 учебном году для 10 класса (базовый уровень), внесены 12 учебников следующих авторов: Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И.; Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федорова Н. Н.; Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др.; Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачева М. В. и др.; Башмаков М. И.; Бутузов В. Ф., Прасолов В. В. / Под ред. Садовниченко В. А.; Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. и др.; Козлов В. В., Никитин А. А., Белоносов В. С. и др. / Под. Ред. Козлова В. В. и Никитина А. А.; Мордкович А. Г., Семенов П. В.; Смирнова И. М., Смирнов В. А.; Муравин Г. К., Муравина О. В.; Шарыгин И. Ф.

Нами проведем сравнительный анализ различных учебников на предмет содержания темы «Решение тригонометрических уравнений».

В учебнике «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс М.И. Башмакова материал представлен в 6 главах [7]. Решение тригонометрических

уравнений рассматривается в третьей главе «Тригонометрические функции». Здесь представлено 10 разобранных примеров решения тригонометрических уравнений, а в задачах к третьей главе представлены 99 уравнений (из них 16 – с отбором решения уравнения в указанных промежутках). В шестой главе «Уравнения и неравенства» предлагается 30 уравнений и 2 неравенства.

Перед изучением темы «Тригонометрические функции» автор рекомендует ответить на такие вопросы, как периодические процессы, углы и их измерение, вращательное движение. Далее вводятся определения и простейшие свойства тригонометрических функций, значения тригонометрических функций и формулы приведения. Здесь же автор рассматривает вопрос решения простейших тригонометрических уравнений по тригонометрической окружности. Лишь после рассмотрения разделов «Исследование тригонометрических функций» и «Тожественные преобразования», в разделе «Тригонометрические уравнения» рассматриваются различные виды уравнений и методы их решения.

В учебнике данного автора тема «Тригонометрические уравнения» не выделена отдельно, и тригонометрические уравнения изучаются в контексте темы «Тригонометрические функции». Таким образом, схема изучения темы «Тригонометрические уравнения» определяется следующим образом: «функция → преобразования → уравнения». Более того, в этом учебнике не решается проблема отбора корней, хотя такие задания автором приводятся.

В учебнике «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс А. Г. Мордковича материал представлен в 8 главах [31]. Решение тригонометрических уравнений рассматривается после изучения главы «Тригонометрические функции», перед изучением преобразований тригонометрических выражений. Здесь представлено 11 разобранных примеров тригонометрических уравнений с решениями, а задания для учащихся содержатся в задачнике. В третьей главе «Преобразование тригонометрических выражений» предлагается 10 уравнений, а в восьмой

главе рассматриваются системы уравнений и неравенств, учащимся для решения предложены одно уравнение и одна система уравнений.

В конце изучения каждой главы четко обозначены основные результаты обучения, в виде перечисленных действий: пополнили словарный запас новыми терминами, вывели формулы, получили соотношения, обсудили методы решения уравнений. Во второй главе подробно описывается решение каждого простейшего тригонометрического уравнения, на основе ранее введенных понятий арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса. В этой же главе рассмотрены различные методы решения тригонометрических уравнений (введение новой переменной, разложение на множители, решение однородных уравнений). С введением новой формулы преобразований тригонометрических выражений расширяется круг методов решения тригонометрических уравнений, для которого изученная формула служит средством его сведения к простейшему. Таким образом, схема изучения темы «Тригонометрические уравнения» в данном учебнике определяется следующим образом: «функция→уравнения→преобразования».

Учебник А.Г.Мордковича наиболее удобен для самостоятельного изучения учащимися данной темы, так как очень подробно и доступно излагается теоретический материал. К недостаткам можно отнести не достаточное количество упражнений в учебнике. Однако, можно отметить, что в задачнике [31] содержится большое количество заданий разного уровня сложности по теме «Тригонометрические уравнения», что позволяет учителю дифференцировать работу с учащимися на уроке.

В учебнике «Алгебра и начала анализа» 10-11 класс Ш. А. Алимова и др. материал представлен в 13 главах [2]. Решение тригонометрических уравнений рассматривается в шестой главе «Тригонометрические уравнения». Здесь представлено 14 разобранных примеров решения тригонометрических уравнений и 240 уравнений для решения учащимися (из

них 14 – с отбором решений корней уравнения в указанных промежутках, заданных в виде дроби и содержащих иррациональное выражение). В данном учебнике в пятой главе предлагается 42 уравнения еще до изучения темы.

Авторы рассматривают простейшие тригонометрические уравнения вида $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, а также решение уравнений, сводящихся к квадратным, метод введения вспомогательного угла и метод разложения левой части уравнения на множители.

Перед изучением данной темы авторы учебника предлагают изучить тригонометрические формулы, а после – тригонометрические функции. В процессе решения уравнений предлагается иллюстрировать нахождение корней на тригонометрической окружности, в дальнейшем это позволяет избежать у учащихся вопросов о количестве корней тригонометрического уравнения. Вопрос отбора корней в данном учебнике практически не затронут.

В учебнике «Алгебра и начала анализа» 10 класс Ю. М. Колягина, М. В. Ткачевой, Н. Н. Федоровой материал представлен в 7 главах [3]. Решение тригонометрических уравнений рассматривается в седьмой главе «Решение тригонометрических уравнений». Здесь представлено 83 разобранных примера решения тригонометрических уравнений и 391 уравнение предложено для решения учащимися (из них 51 – с отбором корней тригонометрических уравнений, заданных в виде дроби и содержащих выражение под знаком логарифма или иррациональное выражение).

Материал, касающийся темы «Решение тригонометрических уравнений» представлен после изучения главы «Тригонометрические формулы». Содержание учебного материала данной главы изложено в следующем порядке: уравнения $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$; решение тригонометрических уравнений различными методами; уравнения, содержащие корни и модули; системы тригонометрических уравнений;

появление посторонних корней и потеря корней тригонометрического уравнения. Структура изложения материала по теме «Тригонометрические уравнения» в данном учебнике во многом совпадает с учебником Ш. А. Алимова, но в нем частично есть ответ на вопрос учащихся об отборе корней.

В учебнике «Алгебра и начала анализа» 10 класс С. М. Никольского, М. К. Потапова, Н. Н. Решетникова и др [1] решение тригонометрических уравнений рассматривается во второй главе «Тригонометрические формулы. Тригонометрические функции». Здесь представлено 32 разобранных примера решения тригонометрических уравнений и 208 уравнений для решения учащимися (из них 4 – с отбором корней тригонометрических уравнений, содержащих иррациональное выражение).

В данной главе представлены простейшие тригонометрические уравнения, уравнения, сводящиеся к простейшим заменой неизвестного, применение основных тригонометрических формул для решения уравнений, однородные уравнения. Вопрос отбора корней в тригонометрических уравнениях в данном учебнике не затронут.

При таком подходе изучения тригонометрии, когда уравнения изучаются после формул преобразования тригонометрических выражений, место тригонометрических уравнений определяется систематизацией знаний по темам «Преобразование тригонометрических выражений» и «Основные свойства и графики тригонометрических функций».

Если тригонометрические уравнения и неравенства изучаются до темы «Преобразование тригонометрических выражений», то здесь место их изучения определяется совершенно обратным образом. На изучение тригонометрических уравнений отводится больше времени: как только появляется новая формула, она сразу же используется для решения уравнений или неравенств. В данном случае не формула преобразования является средством для решения тригонометрического уравнения или

неравенства, а уравнение выступает как средство закрепления тригонометрических формул.

В открытом банке заданий профильного уровня в разделе «Уравнения и неравенства» из 1306 заданий 72 – тригонометрические уравнения с отбором корней на заданном промежутке, 25 – показательные уравнения, сводящиеся к решению тригонометрических уравнений, с отбором корней на заданном промежутке, 14 – логарифмические уравнения, содержащие под знаком логарифма тригонометрические функции (из них 9 – с отбором корней на заданном промежутке).

Проведенный анализ учебников показал, что в них содержится недостаточное количество заданий с отбором корней при решении тригонометрических уравнений, а содержание итоговой работы по математике требует определенного уровня знаний и умений по данному вопросу, поэтому при подготовке необходимо использовать материалы открытого банка заданий ЕГЭ по математике и другие дидактические материалы.

2.2. Методические рекомендации по обучению геометрическому методу отбора корней в решении тригонометрических уравнений

Вопрос отбора корней довольно труден для учащихся, а в школьных учебниках он практически не рассматривается [33]. В некоторых уравнениях отбор корней оговорен в условии или диктуется дополнительными ограничениями: знаменатель дроби не равен нулю, выражение под знаком корня четной степени не отрицательно, выражение под знаком логарифма положительно [50, 51].

Под отбором корней в решении тригонометрического уравнения будем понимать следующие виды действий с корнями тригонометрического уравнения: объединение различных серий тригонометрических уравнений в одну; нахождение корней тригонометрического уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям; нахождение общих решений в записи различных серий корней тригонометрических уравнений [11].

В процессе отбора корней при решении тригонометрических уравнений могут быть использованы различные методы: арифметический, алгебраический, геометрический и функционально-графический. Выделим достоинства и недостатки каждого из них.

Арифметический метод отбора является самым простым для понимания учащихся, однако сложно определить с какого значения целочисленного параметра нужно начинать перебор, если концы заданного промежутка находятся далеко от 0 или заданный промежуток большой, или серии решений не являются табличными, а содержат аркфункции.

Алгебраический метод отбора корней по степени сложности понимания учащимися довольно прост, достаточно удобен, когда при использовании арифметического метода последовательный перебор значений параметров приводит к вычислительным трудностям. Недостатком данного метода является громоздкая запись, оформление которой затрачивает много времени, а также трудности в отборе корней, если серии решений не являются табличными, содержат аркфункции.

Для нахождения решения тригонометрического уравнения функционально-графическим методом требуется схематичное построение графика простейшей тригонометрической функции, с чем с легкостью справляются учащиеся, но данные построения затрачивают много времени, и сложно построить график функции, если концы заданного промежутка находятся далеко от нуля или заданный промежуток большой.

Геометрический метод отбора корней удобно использовать при отборе на промежутке, не превосходящем 2π , или в случае, когда решения уравнения не являются табличными. Данный способ является наиболее универсальным способом, но возникают сложности его применения, если промежутки большой длины, тогда выбирают корни на меньшем промежутке и учитывают периодичность.

Обучение геометрическому методу отбора корней необходимо начинать сразу после изучения простейших тригонометрических уравнений и их решения.

Выделим знания, которые необходимы для обучения учащихся этому методу:

- 1) знание взаимного расположения точек на тригонометрической окружности;
- 2) знание основных характеристик точки тригонометрической окружности (угол поворота точки $P(1;0)$; абсцисса, которая соответствует косинусу этого угла; ордината, соответствующая синусу этого угла);
- 3) знание знаков тригонометрических функций по четвертям;
- 4) знание местоположения точек, соответствующих наиболее распространенным значениям углов;
- 5) знание графиков тригонометрических функций и их свойств;
- 6) знание многозначности записи корня тригонометрического уравнения;
- 7) знание зависимости конкретного значения корня от целого параметра;
- 8) знание зависимости величины угла поворота радиуса от количества полных оборотов либо от периода функции.

Среди умений, необходимых для отбора корней в решении тригонометрических уравнений выделим следующие:

- 1) умение отыскивать на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженным в долях числа π и не выраженных в долях числа π ;
- 2) умение отмечать на тригонометрической окружности точки, соответствующие положительным и отрицательным углам поворота радиуса;
- 3) умение изображать числа точкой числовой окружности и определять все числа, которые соответствуют данной точке;
- 4) умение соотносить значения тригонометрических функций с местоположением точки на тригонометрической окружности;
- 5) умение записывать значения аргументов тригонометрических функций по точкам графика функции с учетом периодичности;
- 6) умение записывать значения аргументов тригонометрических функций по точкам графика функции с учетом четности и нечетности функции;
- 7) умение объединять серии корней тригонометрических уравнений;
- 8) умение составлять двойные неравенства для дуг числовой окружности;
- 9) умение находить ограничения, не оговоренные в условии задания по решению тригонометрических уравнений.

Некоторые из перечисленных умений сформированы в процессе изучения предыдущих тем школьного курса математики. Например, умение находить ограничения, не оговоренные в условии задания по решению тригонометрических уравнений, формируется при нахождении области определения функции, начиная с 7 класса. Составлять двойные неравенства для дуг числовой окружности учащиеся научатся после изучения темы «Тригонометрические функции».

Учителю необходимо продумать систему заданий, упражнений по формированию и закреплению перечисленных выше умений. Среди таких заданий выделяем следующие.

1) Задания на закрепление умений отыскивать на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, выраженным в долях числа π и не выраженных в долях числа π .

Задача 1. Выразите в градусной мере величины углов:

$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{36}, \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{9}, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}.$$

Задача 2. Изобразите на единичной окружности точки: $0; 2\pi; -\pi; \pi; -\frac{3\pi}{2};$

$$\frac{7\pi}{2}; \frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}.$$

Задача 3. Расставьте в порядке убывания числа:

$$\frac{\pi}{2}; 3\frac{1}{8}; \pi; \frac{1}{2}; \frac{\pi}{6}; 2,5; \frac{5\pi}{6}.$$

Задача 4. Расставьте в порядке возрастания числа:

$$-\frac{3}{2}; -\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; -\frac{5\pi}{6}; -2.$$

Задача 5. Сравните числа: $\arctg \frac{5}{4}; \frac{\pi}{4}; 1.$

Задача 6. Изобразите на единичной окружности серии корней: $\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}; \left(-1\right)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}.$$

2) Задания по закреплению умения составлять двойные неравенства и отрезки (промежутки) для дуг числовой окружности.

Задача 7. Составьте двойные неравенства для дуг числовой окружности, заданных четвертями:

- а) I и II координатные четверти;
- б) IV, I и II координатные четверти;
- в) II, III и IV координатные четверти.

Задача 8. Укажите отрезки для дуг числовой окружности, заданных четвертями:

- а) II и III координатные четверти;
- б) I, II и III координатные четверти;
- в) I, III и IV координатные четверти.

Задача 9. Выберите из множеств $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ точки, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$. Сделайте это несколькими способами.

3) Задания по закреплению умения находить ограничения, не оговоренные в условии задания по решению тригонометрических уравнений.

Задача 10. По представленным уравнениям запишите ограничения, по которым следует произвести отбор корней:

$$\frac{\cos 2x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos 2x} = 1;$$

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x;$$

$$\sqrt{\cos x + \cos 3x} = -\sqrt{2} \cos x.$$

Выполнение перечисленных выше задач полезно при выполнении тринадцатого задания ЕГЭ по математике профильного уровня. В этой задаче, помимо решения тригонометрического уравнения, требуется произвести отбор корней, и для его успешного выполнения, кроме перечисленных знаний и умений, ученик должен владеть следующими навыками:

- решать простейшие тригонометрические уравнения и неравенства;
- применять известные тригонометрические тождества;
- использовать различные методы решения уравнений;
- оценивать значение иррационального числа.

Одним из условий эффективности применения геометрического метода отбора корней является использование тригонометрической окружности. Тригонометрическая окружность – это окружность, на которой откладываются от условной точки отсчета (0 радиан) углы любой величины: против часовой стрелки углы положительной величины, по часовой стрелке – отрицательной. Тригонометрическую окружность можно «обходить» по-

против часовой стрелки бесчисленное число раз. Объясняется это тем, что все тригонометрические функции периодичны. С учащимися необходимо условиться, что начинают отчет всегда от 0 радиан.

Обучение учащихся геометрическому методу отбора корней следует начинать с отбора серий корней, содержащих табличные значения тригонометрических функций.

Упражнение 1. Решить уравнение $\cos x \cos 5x = 0$.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Отметим, что функции $\cos x$ и $\cos 5x$, входящие в уравнение, имеют общий наименьший положительный период 2π . Поэтому отбор корней удобно проводить на числовой окружности (рис.1), при этом используя градусную меру для записи полученных решений: $x = 90^\circ + k \cdot 180^\circ$ или $x = 18^\circ + n \cdot 36^\circ$.

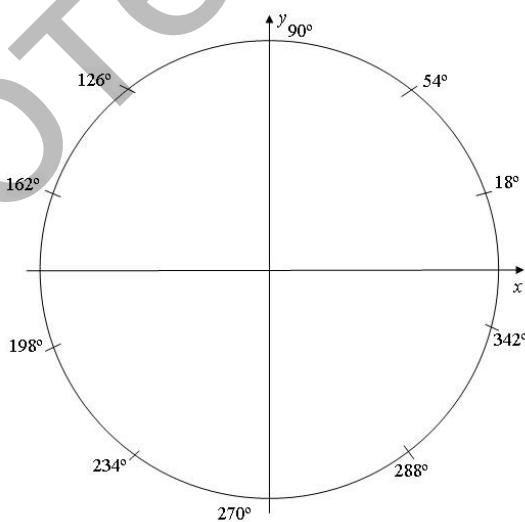


Рис. 1

Из рисунка 1 видим, что вторая серия решений включает в себя первую серию.

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 2. Решить уравнение $\frac{tgx-1}{\sqrt{-\cos x}}=0$

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} tgx-1=0, \\ \cos x < 0. \end{cases}$

Отметим на тригонометрической окружности (рис. 2) корни уравнения $tgx=1$, соответствующие значениям углов $x = \frac{\pi}{4} + \pi, n \in Z$. Выделим также дуги окружности, лежащие во II и III координатных четвертях, так как в этих четвертях выполнено условие $\cos x < 0$.

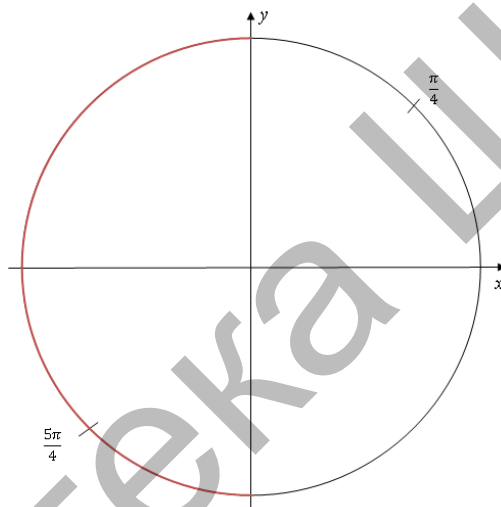


Рис. 2

Из рисунка 2 видно, что решениями системы, а значит и решениями данного уравнения являются значения $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi, n \in Z$ или $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi, n \in Z$.

После решения данного уравнения можно привести учащимся упражнения для самостоятельного решения.

$$\frac{tgx-1}{\sqrt{\sin x}}=0,$$

$$\frac{tgx+1}{\sqrt{-\cos x}}=0,$$

$$\frac{tgx-1}{\sqrt{\cos x}}=0,$$

$$\frac{tgx+1}{\sqrt{-\sin x}}=0.$$

Упражнение 3. Определить количество корней уравнения $ctg 3x \sin 6x - \cos 6x - \cos 12x = 0$ на промежутке $[-\pi; 2\pi]$.

Решение: Умножая обе части уравнения на $\sin 3x \neq 0$, получаем:
 $\sin 3x - \sin 3x \cos 12x = 0, \quad \sin 3x \cdot (-\cos 12x) = 0.$

Отсюда имеем:
$$\begin{cases} \cos 12x = 1, \\ \sin 3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi n}{6}, n \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Функции $\cos 12x$ и $\sin 3x$, входящие в уравнение, имеют основной период, не превосходящий 2π , поэтому проведем отбор корней, используя тригонометрическую окружность. Для этого полученные значения в серии решений и серии ограничений изобразим на тригонометрической окружности (рис. 3) и в ответ запишем количество точек серии решений, не совпавших с точками серии ограничений.

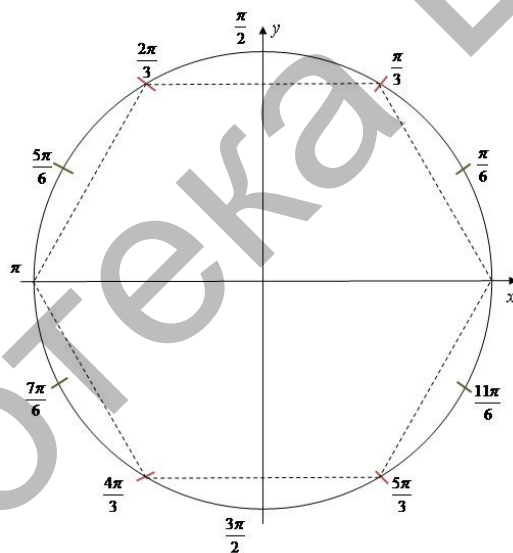


Рис. 3

Ответ: 6.

После решения данного уравнения можно привести учащимся упражнения для самостоятельного решения:

1. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2} \sin x + 1)(\sin x - 3) = 0$, удовлетворяющего неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

2. Найдите все корни уравнения $\sqrt{2} \sin^2 x = \sin x$, удовлетворяющего неравенству $\cos x < 0$.

При данном методе отбора целесообразно при записи серий решений тригонометрических уравнений не использовать общий вид записи серий, а разбивать их на две отдельные.

Упражнение 4. Решить уравнение $\log_2 \left(\frac{1}{\sin x} \right) + \log_2 \left(\frac{1}{\cos x} \right) = -2$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} -\sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \log_2 \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0, \\ -\sin x \cos x = 0,25. \end{cases}$$

Решим уравнение этой системы:

$$-\sin x \cos x = 0,25 \Leftrightarrow \sin 2x = -0,5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ 2x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Функции $\sin 2x$, $\cos x$ и $\sin x$, входящие в уравнение, имеют наименьший положительный период 2π . Для отбора корней используем тригонометрический круг (рис. 4).

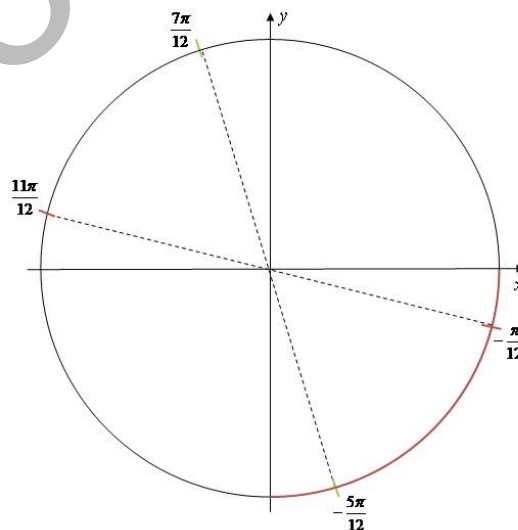


Рис. 4

Условиям $\sin x < 0$ и $\cos x > 0$ удовлетворяют координаты точек, лежащих в IV координатной четверти.

Ответ: $-\frac{\pi}{12} + 2\pi n, -\frac{5\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Упражнение 5. Решить уравнение $|\cos x| = \sqrt{3} \sin x$.

Решение. Данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \pm \cos x = \sqrt{3} \sin x, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ \sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x \geq 0 \end{cases}$$

Так как функции $\operatorname{tg} x$ и $\sin x$ имеют общий наименьший положительный период 2π , то отбор корней проведем на тригонометрическом круге (рис. 5).

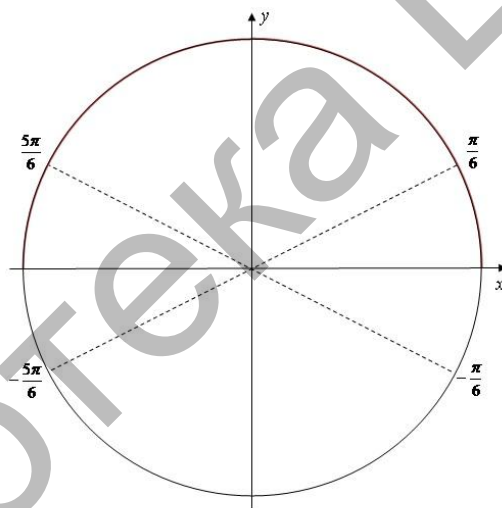


Рис. 5

Ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Геометрический метод отбора корней в тригонометрических уравнениях удобно применять, когда в полученных сериях корней уравнения содержатся не табличные значения тригонометрических функций, когда в уравнении содержатся несколько ограничений. Рассмотрим на примере.

Упражнение 6. Решить уравнение $\frac{2tg^2x+3tgx-2}{\sqrt{-2\cos 2x}}=0$ и указать корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Уравнение $\frac{2tg^2x+3tgx-2}{\sqrt{-2\cos 2x}}=0$ при ограничении $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$

равносильно смешанной системе $\begin{cases} 2tg^2x+3tgx-2=0 \\ \cos 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arctg \frac{1}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\arctg 2 + \pi, n \in \mathbb{Z} \\ \cos 2x < 0 \end{cases}$

Проверим, удовлетворяют ли числа $x = \arctg \frac{1}{2} + \pi, n \in \mathbb{Z}$ условию $\cos 2x < 0$, для этого подставим данные числа в неравенство:

$$\cos\left(2 \cdot \left(\arctg \frac{1}{2} + \pi\right)\right) = \cos\left(2\arctg \frac{1}{2} + 2\pi\right) = \cos\left(2\arctg \frac{1}{2}\right)$$

Так как арктангенс – функция возрастающая, то справедливо неравенство $\arctg 0 < \arctg \frac{1}{2} < \arctg 1$

$$0 < \arctg \frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$$

$$0 < 2\arctg \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos\left(2\arctg \frac{1}{2}\right) = \cos \varphi \text{ причем } \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ а в первой четверти } \cos \varphi > 0, \text{ что не}$$

удовлетворяет условию $\cos 2x < 0$.

Проверим, удовлетворяют ли числа $x = -\arctg 2 + \pi, n \in \mathbb{Z}$ условию $\cos 2x < 0$, для этого подставим данные числа в неравенство:

$$\cos\left(2 \cdot \left(-\arctg 2 + \pi\right)\right) = \cos\left(-2\arctg 2 + 2\pi\right) = \cos\left(-\arctg 2\right)$$

Так как арктангенс – функция возрастающая, то справедливо неравенство $\arctg 1 < \arctg 2 < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\pi}{4} < \arctg \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < 2\arctg \frac{1}{2} < \pi$$

$\cos 2\arctg 2 = \cos \varphi$ причем $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, а во второй четверти $\cos \varphi < 0$, что удовлетворяет условию $\cos 2x < 0$. Следовательно, отбор корней необходимо провести только для второй серии корней $x = -\arctg 2 + \pi, n \in \mathbb{Z}$.

Отметим на тригонометрическом круге границы отрезка $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}\right]$, на линии тангенсов отметим точку -2 и проведем диаметр окружности, проходящий через эту точку (рис. 6). Получили три точки пересечения.

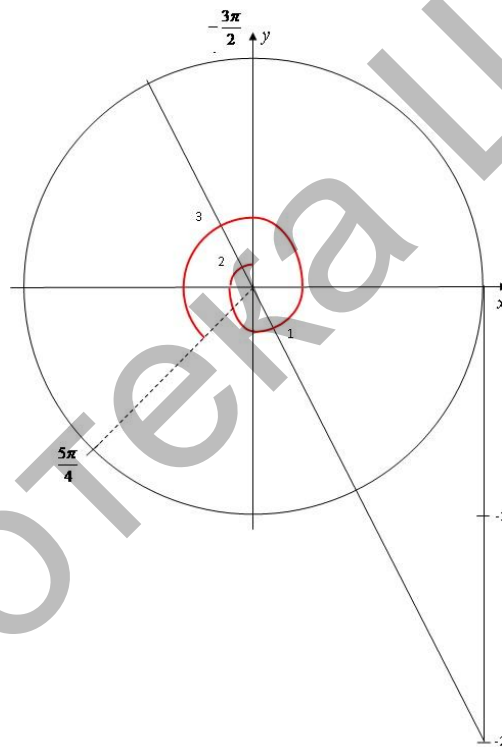


Рис. 6

Вычислим значения x в этих точках.

$$x_1 = -\arctg 2$$

$$x_2 = -\pi - \arctg 2$$

$$x_3 = \pi - \arctg 2$$

Ответ: $x_1 = -\arctg 2$, $x_2 = -\pi - \arctg 2$, $x_3 = \pi - \arctg 2$.

Рассмотрим подробнее использование геометрического метода отбора корней на конкретном примере.

Пусть по завершению решения уравнения получили две серии корней:

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Необходимо отобрать такие x , принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$. Для начала отметим на единичной окружности полученные серии корней (рис. 7).

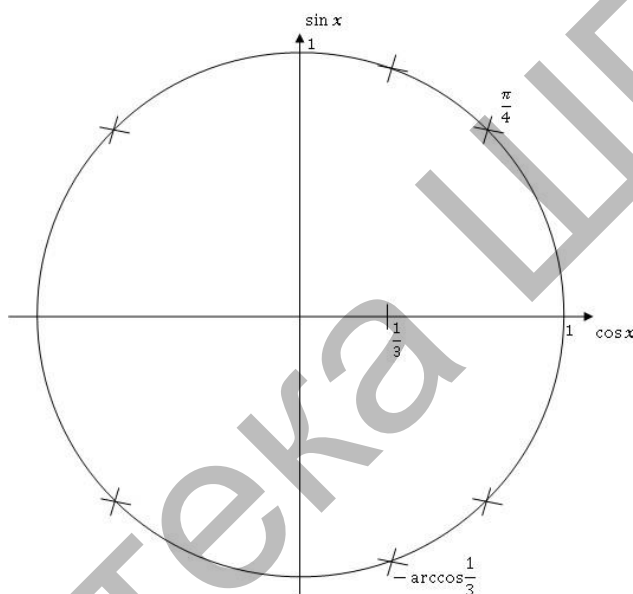


Рис. 7.

Далее необходимо провести углы, соответствующие каждому отмеченному на окружности корню. Для этого необходимо соединить отметку на окружности с ее центром (рис. 8).

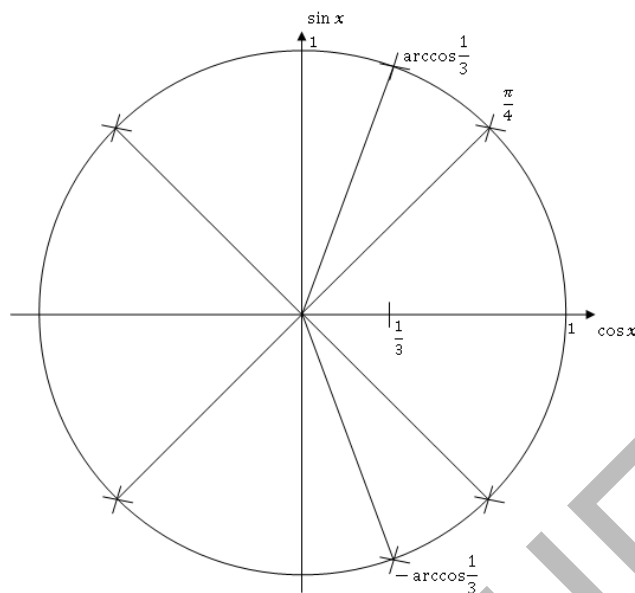


Рис. 8.

Отмечаем на единичной окружности промежуток $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ и оцениваем, сколько точек пересечения с отмеченными ранее углами получилось (рис. 9). В данном случае десять корней из двух серий принадлежат заданному промежутку.

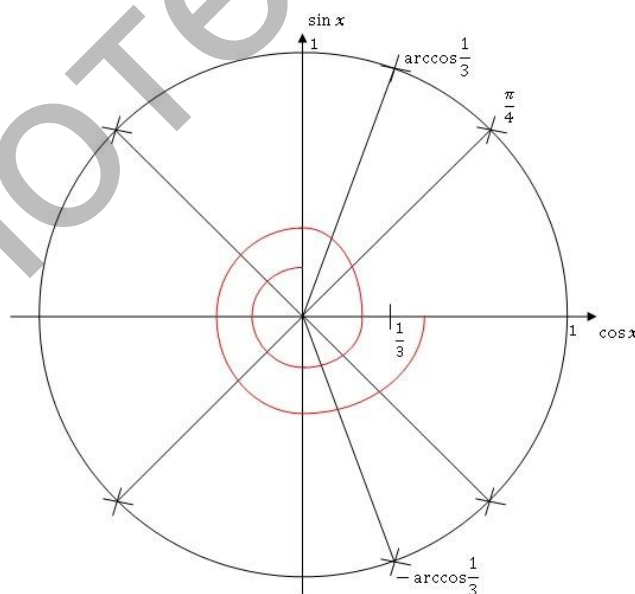


Рис. 9.

Остается просчитать значения x в этих точках. Из первой серии:

$$x_1 = -\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$$

$$x_4 = x_2 + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

$$x_5 = x_4 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$x_7 = x_5 + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_8 = x_7 + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4}$$

$$x_{10} = x_8 + \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$$

Из второй серии:

$$x_3 = -\frac{3\pi}{2} + \pi + \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3}\right) = -\arccos \frac{1}{3}$$

$$x_6 = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{1}{3}\right) = \arccos \frac{1}{3}$$

$$x_9 = x_3 + 2\pi = 2\pi - \arccos \frac{1}{3}$$

В результате применения геометрического метода отбора корней при решении данного тригонометрического уравнения определено значение десяти корней, входящих в заданный промежуток.

Использование системы поэтапного формирования выделенных знаний и умений, обучение выполнению заданий от простых к более сложным (отбор на промежутке, длина которого превосходит 2π и значение обратной тригонометрической функции, входящей в серию решений не является табличной), позволяет научить школьников отбору корней в решении тригонометрических уравнений.

2.3. Разработка программы элективного курса по подготовке к ЕГЭ «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений»

Результаты ЕГЭ по математике и анализ ошибок учащихся при выполнении заданий с отбором корней в решении тригонометрических уравнений, показывают, что многие не приступают к выполнению заданий повышенного уровня сложности, а если и приступают, то часто допускают ошибки. Причин здесь может быть несколько: недостаточно знаний учащихся, при подготовке рассматриваются решения только однотипных заданий, рассматриваются только стандартные методы и приемы решений, не анализируются допущенные ошибки.

В курсе алгебры и начал анализа рассматриваются основные методы решения тригонометрических уравнений, которых бывает недостаточно для успешной сдачи ЕГЭ по математике. В программе элективного курса «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений» предлагается углубленное изучение методов решения тригонометрических уравнений школьного курса математики, расширение перечня методов за счет освоения новых и изучение некоторых методов решения уравнений с использованием обратных тригонометрических функций.

Материалы данного элективного курса включают нестандартные методы решения, которые позволят учащимся, в случае необходимости, решать более сложные задачи уже на другой ступени математического образования. Содержание данного элективного курса направлено на удовлетворение индивидуальных образовательных интересов, потребностей и склонностей учащихся в процессе обучения математике.

Использование программы данного элективного курса поможет школьникам через практические занятия оценить свой потенциал с точки

зрения образовательной перспективы и предоставит ему возможность работать с тригонометрическими уравнениями на уровне повышенных возможностей.

Для учителя программа элективного курса окажет помощь в подготовке учащихся к математическим олимпиадам и ЕГЭ по математике.

Пояснительная записка

Нормативно-правовые документы, на основе которых разработана рабочая программа:

- Федеральный закон Российской Федерации от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;

- приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.12.2010 № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» с изменениями от 31 декабря 2015г. №1577.

- постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 29.12.2010 №189 (ред. от 24.11.2015) «Об утверждении СанПин 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях» (зарегистрировано в Минюсте России 03.03.2011 г. №19993)»;

- постановление Главного государственного санитарного врача Российской Федерации от 24.11.2015 №81 «О внесении изменений №3 в СанПин 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения, содержания в общеобразовательных организациях».

Программа курса рассчитана на 17 часов в год. Курс может быть реализован в 10 классе после изучения соответствующих тем школьного курса математики и в 11 классе при подготовке к итоговому экзамену по математике.

Цель курса: научить учащихся решению тригонометрических уравнений и методам отбора корней в их решении.

Задачи курса:

- 1) формирование у учащихся системы знаний и умений по решению задач ЕГЭ, олимпиадных задач и задач исследовательского характера;
- 2) формирование навыков применения знаний при решении задач различной сложности;
- 3) систематизация методов решения и методов отбора корней в решении тригонометрических уравнений;
- 4) развитие познавательного интереса учащихся к математике.

Планируемые результаты.

К личностным результатам освоения программы элективного курса относятся следующие:

- формирование готовности обучающихся к саморазвитию и личностному самоопределению;
- развитие умений ясно, точно и грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи;
- формирование мотивации к обучению и целенаправленной познавательной деятельности;
- стремление к самоконтролю процесса и результата деятельности;
- способность к эмоциональному восприятию математических понятий, логических рассуждений, методов решения уравнений, рассматриваемых проблем.

Метапредметным результатом изучения курса является формирование следующих универсальных учебных действий (УУД).

Регулятивные УУД:

- самостоятельно обнаруживать и формулировать учебную проблему, определять цель УД;

– выдвигать версии решения проблемы, осознавать (и интерпретировать в случае необходимости) конечный результат, выбирать средства достижения цели из предложенных, а также искать их самостоятельно;

– составлять (индивидуально или в группе) план решения проблемы (выполнения проекта);

– сверять, работая по плану, свои действия с целью и при необходимости исправлять ошибки самостоятельно (в том числе и корректировать план);

– совершенствовать в диалоге с учителем самостоятельно выбранные критерии оценки.

Познавательные УУД:

– формировать представление о математической науке как сфере человеческой деятельности, о ее значимости в развитии цивилизации;

– осуществлять выбор наиболее эффективных методов решения уравнений и отбора их корней в зависимости от конкретных условий;

– осуществлять расширенный поиск информации с использованием ресурсов библиотек и Интернета;

– использовать компьютерные и коммуникационные технологии для достижения своих целей;

– анализировать, сравнивать, классифицировать и обобщать факты и явления;

– давать определения понятиям.

Коммуникативные УУД:

– самостоятельно организовывать учебное взаимодействие в группе;

– учиться критично относиться к своему мнению, с достоинством признавать ошибочность своего мнения и корректировать его;

– в дискуссии уметь выдвинуть аргументы и контраргументы;

- понимая позицию учащихся, различать в их речи: мнение, доказательство, факты;
- уметь взглянуть на ситуацию с иной позиции и договариваться с людьми иных позиций.

Предметным результатом изучения курса является сформированность следующих умений.

В результате изучения курса учащиеся должны уметь:

- решать тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным;
- решать тригонометрические уравнения разложением на множители (используя различные способы разложения на множители: группировку, формулы сокращенного умножения, вынесение за скобки);
- решать тригонометрические уравнения с использованием формул двойного угла и половинного угла;
- решать тригонометрические уравнения, используя формулы приведения;
- решать тригонометрические уравнения, используя теоремы сложения;
- решать системы тригонометрических уравнений;
- решать тригонометрические уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции;
- отбирать корни тригонометрических уравнений, используя тригонометрическую окружность;
- отбирать корни тригонометрических уравнений согласно заданным условиям.

Таблица 1

Тематический план элективного курса «Методы отбора корней в
решении тригонометрических уравнений» 17 часов

№ п/п	Название темы	Кол-во часов
1	Решение простейших тригонометрических уравнений	1 час
2	Решение тригонометрических уравнений разложением на множители и способом группировки	1 час
3	Решение тригонометрических уравнений, сводящихся к квадратному уравнению	1 час
4	Решение однородных тригонометрических уравнений	1 час
5	Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение	1 час
6	Решение тригонометрических уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента	1 час
7	Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму	1 час
8	Решение тригонометрических уравнений с применением формул понижения степени	1 час
9	Решение тригонометрических уравнений путем домножения на некоторую тригонометрическую функцию	1 час
10	Решение тригонометрических уравнений вида $P(\sin x \pm \cos x; \sin x \cdot \cos x) = 0$, где $P(y, z)$ – многочлен	1 час
11	Решение тригонометрических уравнений методом универсальной подстановки. Метод оценок.	1 час
12	Комбинированные и нестандартные уравнения	1 час
13	Решение заданий ЕГЭ	1 час
14	Арифметический и алгебраический методы отбора корней	1 час
15	Геометрический и функционально-графический методы отбора корней	1 час
16	Решение тригонометрических уравнений с отбором корней	1 час
17	Поисково-исследовательские задачи	1 час

Фрагменты занятий № 12 и № 16, содержащие тригонометрические уравнения с образцами их выполнения по темам «Комбинированные и нестандартные уравнения» и «Решение тригонометрических уравнений с отбором корней» приведены в приложениях 1, 2.

Выводы по второй главе:

Проведен сравнительный анализ учебников «Алгебра и начала анализа» для 10 класса, входящих в Федеральный перечень учебников алгебры, рекомендуемых к использованию в 2017-2018 учебном году на предмет содержания темы «Решение тригонометрических уравнений». Проанализирован раздел «Уравнения и неравенства» открытого банка заданий, в котором из 1306 заданий, 111 – задания с отбором корней в решении тригонометрических уравнений.

Выделены достоинства и недостатки методов отбора корней в тригонометрических уравнениях. Геометрический метод отбора корней определен, как наиболее удобный и требующий меньших временных затрат для учащихся.

Разработана система тренировочных упражнений, дополняющая материал школьных учебников и нацеленная на формирование и закрепление выделенных знаний и умений учащихся, а также на обучение геометрическому методу отбора корней.

Разработана программа элективного курса «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений», направленного на подготовку учащихся 10-11 классов к единому государственному экзамену по математике в количестве 17 часов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обобщающее повторение, в частности подготовка к Единому государственному экзамену – заключительный этап освоения учебных дисциплин на старшей ступени общего образования. Она призвана выполнить интегрирующую функцию, которая заключается в формировании системности знаний, в понимании взаимосвязи между изучаемыми понятиями, фактами, методами, способами деятельности.

Учителю необходимо сформировать у учащихся систему знаний по всем темам школьного курса математики, включая и тему «Решение тригонометрических уравнений». В последнее время на ее изучение в старшей школе отводится все меньше времени. Такие задания популярны при проведении ЕГЭ, всевозможных конкурсов, олимпиад, отборов математически одарённых учащихся.

В данной работе были изучены и кратко изложены теоретические вопросы, связанные с отбором корней в решении тригонометрических уравнений, в частности, проанализированы различные понятия тригонометрического уравнения и его решения, выделены аналитические методы решения с разобранными примерами уравнений для каждого метода. Рассмотрены четыре метода отбора корней в решении тригонометрических уравнений.

Проведен сравнительный анализ учебников «Алгебра и начала анализа» для 10 класса, входящих в Федеральный перечень учебников алгебры, рекомендуемых к использованию в 2017-2018 учебном году на предмет содержания темы «Решение тригонометрических уравнений». Проанализирован раздел «Уравнения и неравенства» открытого банка

заданий, в котором из 1306 заданий, 111 – задания с отбором корней в решении тригонометрических уравнений.

Выделены достоинства и недостатки каждого метода отбора корней в решении тригонометрических уравнений. Геометрический метод отбора корней определен, как наиболее удобный и требующий меньших временных затрат для учащихся. Подобраны, самостоятельно составлены, систематизированы и решены задания на отбор корней в решении тригонометрических уравнений геометрическим методом. Разработана система тренировочных упражнений, составленная по принципу «от простого к сложному», дополняющая материал школьных учебников и нацеленная на формирование и закрепление выделенных знаний и умений учащихся, а также на обучение геометрическому методу отбора корней.

Разработана программа элективного курса «Методы отбора корней в решении тригонометрических уравнений», направленного на подготовку учащихся 10-11 классов к единому государственному экзамену по математике в количестве 17 часов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и начала анализа [Текст] : учеб.для 10 кл. общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский [и др.]. – 2-е изд., доп. – Москва : Просвещение, 2003. – 383 с.
2. Алгебра и начала анализа [Текст] : учеб.для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. – 10-е изд. – Москва : Просвещение, 2002. – 384 с.
3. Алгебра и начала анализа.10 класс [Текст] : учеб.для общеобразоват. учреждений / Ю. М. Колягин [и др.]. – Москва : Мнемозина, 2001. – 364 с.
4. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы[Текст] : в 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый уровень) / А. Г. Мордкович [и др.] ; под ред. А. Г. Мордковича. – 12-е изд., испр. и доп. – Москва : Мнемозина, 2011. – 271 с.
5. Андронов, И. К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач [Текст] : пособие для учителей / И. К. Андронов, А. К. Окунев. – 2-е изд., доп. – Москва : Просвещение, 1967. – 648 с.
6. Бабакина, Т. Решение тригонометрических уравнений различных видов [Текст] / Т. Бабакина // Математика. – 2013. –№ 5. – С. 22-24.
7. Башмаков, М. И. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс [Текст] : учеб.для общеобразоват. учеб. заведений. – 3-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа, 2001. – 400 с.
8. Бегунц, А. В.Тригонометрия в комбинированных задачах [Текст] / А. В. Бегунц, Д. В. Горяшин // Математика в школе : [0+] : науч. - теорет. и метод.журн. – 2015. –№ 8. – С. 17-23.
9. Белкина, Е. Н. Геометрический метод отбора корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке [Электронный

ресурс] / Е. Н. Белкина // Педагогический поиск. – 2017. – № 12. – С. 4-7. – Доступ с сайта НЭБ Elibrary.ru. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=32243552>. – 15.08.2018.

10. Блинов, Т. Л. Предупреждение ошибок при решении тригонометрических уравнений на ЕГЭ [Текст] / Т. Л. Блинов, И. А. Запрудина // Математика в школе : [0+] : науч. - теорет. и метод. журн. – 2015. – № 9. – С. 21-24.

11. Бобровская, А. В. Практикум. Функции и графики [Текст] : учеб.-метод. пособие для учащихся 9-11 кл. / А. В. Бобровская, О. И. Чикунова. – Шадринск : Шадринский Дом Печати, 2010. – 61 с.

12. Вельмушкина, Н. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции [Текст] : 10 кл. / Н. Вельмушкина // Математика : прил. к газ. "Первое сент.". – 2001. – № 33. – С. 29-32.

13. Воробьев, В.В. Практикум по подготовке к ЕГЭ по математике (задачи С1). Практические рекомендации для учащихся 10-11 классов (тесты) [Электронный ресурс]: практ. рек. / В. В. Воробьев. – Москва : Директ-Медиа, 2014. – 87 с. – Доступ с сайта ЭБС Университетская библиотека online. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=233361&sr=1. – 03.09.2018.

14. Воробьев, В. В. Практикум по подготовке к ЕГЭ по математике (задачи С-1) [Текст] / В. В. Воробьев // Современный урок : [+16] : предмет.-содерж. журн. для зам. директора по учеб.-воспитат. и науч.-метод. работе и учителей-предметников. – 2015. – № 4. – С. 3-10.

15. Воробьев, В. В. Система подготовки к ЕГЭ по математике [Текст] / В. В. Воробьев // Современный урок : предмет.-содерж. журн. для зам. директора по учеб.-воспитат. и науч.-метод. работе и учителей-предметников. – 2014. – № 3. – С. 2-10. – Продолж. Начало: № 10-10, 2012; № 1-8, 2013; № 1, 2, 2014.

16. Воробьев, В. В. Система подготовки к ЕГЭ по математике [Текст] / В. В. Воробьев // Современный урок : предмет.-содерж. журн. для зам. директора по учеб.-воспитат. и науч.-метод. работе и учителей-предметников. – 2012. – № 1. – С. 67-72.

17. Воробьев, В.В. Тренировочные варианты для качественной подготовки к ЕГЭ по математике для учащихся 10-11 классов [Электронный ресурс]/ В. В. Воробьев. – Москва :Директ-Медиа, 2014. – 48 с. –Доступ с сайта ЭБС Университетская библиотека online. – Режим доступа:https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=233960&sr=1. – 03.09.2018.

18. Далингер, В. А.Математика: тригонометрические уравнения и неравенства [Электронный ресурс]: учеб.пособие для СПО / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – Москва : Юрайт, 2018. – 136 с. – Доступ с сайта ЭБС Юрайт. – Режим доступа: <https://biblio-online.ru/book/A4D15FE3-2443-4C23-8669-FB30D812F357/matematika-trigonometricheskie-uravneniya-i-neravenstva>. – 15.08.2018.

19. Единый государственный экзамен по математике [Электронный ресурс] : спецификация контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена в 2018 г. : (профильный уровень) // Егэша. – Режим доступа: http://егэша.рф/demo/eg18/сpec/mat_prof.pdf. – 13.12.2018.

20. Зеленина, Н. А.Проблемы подготовки школьников к итоговой аттестации в контексте результатов ЕГЭ по математике 2017 года в Кировской области [Электронный ресурс] / Н. А. Зеленина, М.В.Крутихина// Концепт. – 2018. – №3. – Доступ с сайта НЭБ КиберЛенинка. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-podgotovki-shkolnikov-k-itolgovoy-attestatsii-v-kontekste-rezultatov-ege-po-matematike-2017-goda-v-kirovskoy-oblasti>. – 15.08.2018.

21. Кодификатор требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных учреждений и элементов содержания по математике

для составления контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по математике [Электронный ресурс] // MirUrokov.ru. – Режим доступа: <https://clck.ru/EssNk>. – 13.12.2018.

22. Корянов, А. Г. Математика. ЕГЭ 2011. Отбор корней в тригонометрических уравнениях (типовые задания C1) [Электронный ресурс] / А. Г. Корянов, А. А. Прокофьев. – Режим доступа: <http://boombook.narod.ru/ege/2011-mys/C1-2011-kornv.pdf>. – 13.12.2018.

23. Кутасов, А. Д. Пособие по математике для поступающих в ВУЗы [Текст] / А. Д. Кутасов [и др.] ; под ред. Г. Н. Яковлева. – Москва : Наука, 1981. – 608 с.

24. Ладошкин, М. В. Обучение решению тригонометрических уравнений при подготовке к единому государственному экзамену [Электронный ресурс] / М. В. Ладошкин, Н. В. Ходырева // Ученый эксперимент в образовании – 2017. – № 4. – С. 34-41. – Доступ с сайта НЭБ Elibrary.ru. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=30744820>. – 15.08.2018.

25. Лобанова, Н. И. Обучение старшеклассников способам отбора корней тригонометрических уравнений в системе дополнительного образования [Электронный ресурс] / Н. И. Лобанова // Актуальные проблемы современного образования. – 2016. – № 1. – С. 191-198. – Доступ с сайта НЭБ Elibrary.ru. – Режим доступа: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26709540>. – 15.08.2018.

26. Лунгу, К.Н. Задачи по математике [Электронный ресурс]/ К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. – Москва :Физматлит, 2008. – 336 с. – Доступ с сайта ЭБС Университетская библиотека online. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82619&sr=1. – 03.09.2018.

27. Малько, Л. Т. Рациональная запись ответов при решении тригонометрических уравнений [Электронный ресурс] / Л. Т. Малько, Т. И. Котло, Н. Ф. Семенова // Наука. Инновации. Технологии. – 2009. – №4.

– Доступ с сайта НЭБ КиберЛенинка. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/ratsionalnaya-zapis-otvetov-pri-reshenii-trigonometricheskih-uravneniy>. – 15.08.2018.

28. Математика в примерах и задачах [Электронный ресурс]: учеб.пособие : в 2 ч. / Л. И. Майсеня[и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсеня. – Минск :Вышэйшая школа, 2014. – Ч. 1. – 360 с. – Доступ с сайта ЭБС Университетская библиотека online. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=450455&sr=1. – 03.09.2018.

29. Математика. Алгебра и начала математического анализа, геометрия. 10 класс[Текст] : учебник / В. В. Козлов [и др.] ; под ред. В. В. Козлова, А. А. Никитина. – Москва : Русское слово, 2017. – 464 с.

30. Мирошин, В. Отбор корней в тригонометрических уравнениях [Текст] / В. Мирошин // Математика. – 2006. – № 17. – С.9-12.

31. Мордкович, А.Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс [Текст] : в 2 ч. Ч. 1: учеб.для общеобразоват. учреждений. – 6-е изд. – Москва : Мнемозина, 2005. – 375 с.

32. Мордкович, А. Г. Алгебра. 10 класс[Текст] : учебник / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – Москва, 2009. – 396 с.

33. Мордкович, А.Г. Решаем уравнения[Текст] / А. Г. Мордкович. – Москва : Школа-Пресс, 1995. – 80 с.

34. Мугаллимова, С. Обучение отбору корней тригонометрического уравнения [Текст] / С. Мугаллимова // Математика. – 2014. – № 10: Внимание - на сильных учащихся. – С. 30-32.

35. Муравин, Г. К. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия [Текст] : углубленный уровень. 10 класс : учебник / Г. К. Муравин, О. В. Муравина. – Москва : Дрофа, 2012. – 318 с.

36. Неустроева, О.А. Отбор корней в тригонометрических уравнениях [Текст] / О. А. Неустроева // Актуальные вопросы преподавания математики

в школе: сб. ст. / под ред. А. В. Бобровской, П. С. Коркиной, О. И. Чикуновой. – Шадринск, 2004. – Вып. 1. – С.28-33.

37. Новиков, А.И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства [Электронный ресурс]/ А. И. Новиков. – Москва :Физматлит, 2010. – 260 с. – Доступ с сайта ЭБС Университетская библиотека online. – Режим доступа: https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=68869&sr=1. – 03.09.2018.

38. Письменный, Д. Т. Готовимся к экзамену по математике [Текст] / Д. Т. Письменный. – 6-е изд., испр. и доп. – Москва :Рольф, 2001. – 320 с.

39. Российская Федерация. Законы. Об образовании в Российской Федерации [Электронный ресурс] :федер. закон РФ от 29.12.2012 № 273-ФЗ. – Доступ из справ.-правовой системы "КонсультантПлюс".

40. Российская Федерация. Министерства образования и науки РФ. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования[Электронный ресурс]: приказ Министерства образования и науки Российской Федерации от 17.12.2010 № 1897 с изм. от 31 дек. 2015г. №1577. – Доступ из справ.-правовой системы "КонсультантПлюс".

41. Российская Федерация. Министерство здравоохранения. О внесении изменений №3 в СанПин 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения, содержания в общеобразовательных организациях»[Электронный ресурс] :постановление Главного гос. санитарного врача Российской Федерации от 24.11.2015 №81. – Доступ из справ.-правовой системы "КонсультантПлюс".

42. Российская Федерация. Министерство здравоохранения. Об утверждении СанПин 2.4.2.2821-10 «Санитарно-эпидемиологические требования к условиям и организации обучения в общеобразовательных учреждениях» (зарегистрировано в Минюсте России 03.03.2011 г. №19993)»[Электронный ресурс] : постановление Главного гос. санитарного

врача Российской Федерации от 29.12.2010 №189 (ред. от 24.11.2015). – Доступ из справ.-правовой системы "КонсультантПлюс".

43. Самсонова, П. Тема урока: "Решение тригонометрических уравнений различными способами" [Текст] / П. Самсонова // Математика. – 2008. – №22. – С.13-14.

44. Севрюков, П. Ф. Основные виды тригонометрических уравнений [Текст] / П. Ф. Севрюков // Математика. Все для учителя!. Комплексная поддержка учителя : [16+] : науч.-метод. журн. : осн. в мае 2010 г. – 2015. – № 2. – С. 10-13.

45. Семенов, А. Преобразование тригонометрических выражений [Текст] / А. Семенов // Математика. – 2008. – №19. – С.41-46.

46. Семенов, А. Решение тригонометрических уравнений [Текст] / А. Семенов // Математика. – 2008. – №24. – С.37-43.

47. Хабибуллин, К. Я. Систематизируем методы решения тригонометрических уравнений [Текст] / К. Я. Хабибуллин // Образование в современной школе. – 2009. – № 9. – С. 30-38.

48. Чанилова, Н. Г. Методы решения тригонометрических уравнений [Текст] / Н. Г. Чанилова // Математика : учеб.-метод. газ. – 2011. – № 15. – С. 21-22.

49. Чикунова, О. И. Тригонометрические уравнения (модульная технология) [Текст] : учеб. пособие для учащихся 10-11 кл. : практикум / О. И. Чикунова. – 2-е изд., доп. – Шадринск : Шадринский Дом Печати, 2010. – 65 с.

50. Шарыгин, И.Ф. Математика для поступающих в вузы [Текст]: учеб. пособие / И. Ф. Шарыгин. – 6-е изд., стереотип. – Москва: Дрофа, 2006. – 479 с.

51. Шестаков, С. А. ЕГЭ 2011. Математика. Задача C1 [Текст] / С. А. Шестаков, П. И. Захаров ; под ред. А. Л. Семенова, И. В. Яценко. – Москва : МЦНМО, 2011. – 120 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приложение 1

Фрагмент занятия № 12 на тему «Комбинированные и нестандартные уравнения».

Данное занятие практической направленности. Перед учащимися ряд нестандартных уравнений, которые они должны решить, опираясь на все полученные ранее знания по теме «Решение тригонометрических уравнений». В начале занятия учащиеся совместно с учителем разбирают несколько предложенных заданий.

Пример 1. Решить уравнение $\cos 2x - 4\sin 2x - 4(\sin x)^{0,5} = 0$

Решение. Если $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$, то числа $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не являются решением

данного уравнения $\cos 2x - 4\sin 2x - 4 = 0$; $2\cos^2 x - 8\sin x \cos x - 5 = 0$;
 $0 - 8 \cdot 1 \cdot 0 - 5 = -5$; $-5 \neq 0$.

Уравнение $\cos 2x - 4\sin 2x - 4(\sin x)^{0,5} = 0$ равносильно смешанной системе:

$$\begin{cases} \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{8 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - 4 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 4 - \operatorname{tg}^2 x = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \operatorname{tg}^2 x - 8 \operatorname{tg} x - 3 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 5 \operatorname{tg}^2 x + 8 \operatorname{tg} x + 3 = 0 \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -1 \\ \operatorname{tg} x = -\frac{3}{5} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right] \\ \left[\begin{aligned} x &= -\operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \pi - \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right] \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

Числа $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ и $-\arctg \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\sin x > 0$.

Ответ: $\pi - \arctg \frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $7^{\sin 2x} + 6\sqrt{7} \cdot 7^{\cos x \sin x} - 49 \cdot 7^{\sin x} = 0$.

Решение. Левая часть уравнения имеет смысл, если $\sin x < 0$. Учитывая это условие, исходное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 7^{\sin 2x} + 6\sqrt{7} \cdot 7^{\cos x \sin x} - 49 = 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

Обозначим $7^{\sin x \cos x} = t, \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \leq t \leq \sqrt{7} \right)$.

Так как $-1 \leq \sin 2x \leq 1$, тогда $-1 \leq 2 \sin x \cos x \leq 1$, значит $-\frac{1}{2} \leq \sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$,
отсюда $7^{-\frac{1}{2}} \leq 7^{\sin x \cos x} \leq 7^{\frac{1}{2}}, 7 > 1$, а так как $7^{\sin x \cos x} = t$, то $\frac{1}{\sqrt{7}} \leq t \leq \sqrt{7}$.

Тогда получим квадратное уравнение $t^2 + 6\sqrt{7}t - 49 = 0$.

Отсюда находим корни уравнения $t_1 = -7\sqrt{7}$ (не удовлетворяет условию $\frac{1}{\sqrt{7}} \leq t \leq \sqrt{7}$), $t_2 = \sqrt{7}$.

Если $t = \sqrt{7}$, то получим $7^{\sin x \cos x} = 7^{0,5}$, $\sin x \cos x = 0,5$,

$2 \sin x \cos x = 1$, $\sin 2x = 1$, тогда исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

Числа $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\sin x < 0$.

Ответ: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = -2$.

Решение. Данное уравнение $\log_2 \sin x + \log_2 \cos x = -2$ равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \log_2 \sin x \cos x = -2 \\ \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cos x = \frac{1}{4} \\ \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

Использовали формулу $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$, $a > 0, a \neq 1; b > 0; c > 0$.

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{13\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{17\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z} \\ \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$$

Числа $\frac{\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}; \frac{5\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$ не удовлетворяют условию $\begin{cases} \sin x < 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}$.

Ответ: $\frac{13\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}; \frac{17\pi}{12} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Решить уравнение $\log_{0,5} (8 + 6 \sin x) + 2 = \log_5 (\cos^2 x + 5)$.

Решение. Рассмотрим левую часть данного уравнения:

$$\log_{0,5} (8 + 6 \sin x) + 2$$

Заметим, что $-1 \leq \sin x \leq 1$, тогда $2 \leq 8 + 6 \sin x \leq 14$;

$$\log_{0,5} 14 \leq \log_{0,5} (8 + 6 \sin x) \leq -1.$$

Функция $y = \log_{0,5} z$ - убывающая при $z > 0$ ($0 < 0,5 < 1$).

$$\log_{0,5} 14 + 2 \leq \log_{0,5} (4 + 6 \sin x) + 2 \leq 1$$

Правая часть $\log_5 (4 \cos^2 x + 5) = 1$.

Заметим, что $-1 \leq \cos^2 x \leq 1$, тогда $5 \leq 4 \cos^2 x + 5 \leq 9$; $1 \leq \log_5 (4 \cos^2 x + 5) \leq \log_5 9$.

Функция $y = \log_5 t$ - возрастающая при $t > 0$ ($5 > 1$).

Левая часть исходного уравнения равна его правой части, лишь в случае, если $\log_{0,5} (4 + 6 \sin x) + 2 = 1$ и $\log_5 (4 \cos^2 x + 5) = 1$, таким образом исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение система

$$\begin{cases} \log_{0,5} (4 + 6 \sin x) + 2 = 1 \\ \log_5 (4 \cos^2 x + 5) = 1 \end{cases}$$

Решением первого уравнения является серия $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$,

удовлетворяет второму уравнению.

$$\log_5 \left(4 \cos^2 \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) + 5 \right) = \log_5 (4 \cdot 0 + 5) = \log_5 5 = 1$$

Следовательно, решением системы, а значит и решением исходного уравнения являются числа $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Уравнения для самостоятельного решения по теме «Комбинированные и нестандартные уравнения».

$$(7^{\sin 2x} + 6\sqrt{7} \cdot 4^{\cos x \sin x} - 49) \sin x^{0,5} = 0$$

$$(5^{\sin x} - 0,04^{\sin x} + 4,8) \cos x^{0,5} = 0$$

$$(1 - \cos 2x + 2\sqrt{3} \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) \cos x^{0,5} = 0$$

$$(7^{\sin 2x} - 7^{\cos x}) (\sin x + 1)^{-1} = 0$$

$$(4^{\cos^2 x} - 11^{\cos x}) (\sin x - 1)^{-1} = 0$$

$$\log_2 (\sin x) + \log_2 (\cos x) = -2$$

$$\log_{\sqrt{3}} (\sin x) - \log_{\sqrt{3}} (\cos x) = -1$$

$$\log_{0,5} (4 + 6 \sin x) + 2 = \log_5 (4 \cos^2 x + 5)$$

$$(4 \sin^2 x - 4 \sin x + 5) \log_2 (4x - 12) + |4x + 12| - 8 = 16$$

Библиотека ШГУ

Фрагмент занятия № 16 на тему «Решение тригонометрических уравнений с отбором корней».

Данное занятие практической направленности. Перед учащимися ряд тригонометрических уравнений с отбором корней, которые они должны решить, опираясь на все полученные ранее знания по теме «Отбор корней тригонометрических уравнений». В начале занятия учащиеся совместно с учителем разбирают несколько предложенных заданий.

Пример 5. Найти число корней уравнения $\frac{\sin 3x \sin x - \sin^2 x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$

Решение. ОДЗ: $16 - x^2 > 0$; $-4 < x < 4$; $x \in (-4; 4)$.

Уравнение $\frac{\sin 3x \sin x - \sin^2 x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} \sin 3x \sin x - \sin^2 x = 0 \\ -4 < x < 4 \end{cases}$.

Упростим выражение в левой части уравнения, используя формулы

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta); \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; 2 \sin 3x \sin x - 2 \sin^2 2x = 0;$$

$$\cos 2x - \cos 4x - 2 \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = 0, \quad \cos 2x - \cos 4x + \cos 4x - 1 = 0, \quad \cos 2x = 1, \quad 2x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -4 < x < 4 \end{cases}$$

$-4\pi; 0; \pi$, следовательно, число корней равно 3.

Ответ: 3.

Пример 6. Решить уравнение $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 2x}{6x^2 - 5\pi x + \pi^2} = 0$

Найти значение выражения $\frac{6x_1}{x_2}$, если x_1 – наибольший отрицательный корень, x_2 – наименьший положительный корень.

Решение. ОДЗ: $6x^2 - 5\pi x + \pi^2 \neq 0$ т.е. $x_1 \neq \frac{\pi}{3}$, $x_2 \neq \frac{\pi}{2}$.

Уравнение $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 2x}{6x^2 - 5\pi x + \pi^2} = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 2x = 0 \\ x \neq \frac{\pi}{3}, x \neq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

При решении уравнения $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 2x = 0$ используем формулы:

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 - \cos^2 2x = 0,$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x - 4\cos^2 2x = 0, \quad 2 - \cos^2 2x = 0, \quad \cos^2 2x = 1,$$

$$\frac{1 + \cos 4x}{2} = 1, \quad \cos 4x = 1, \quad x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $x \neq \frac{\pi}{3}, x \neq \frac{\pi}{2}$, то $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ — наибольший отрицательный

корень, $x_2 = \pi$ — наименьший положительный корень, тогда $\frac{6x_1}{x_2} = \frac{6\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\pi} = -3$.

Ответ: -3

Уравнения для самостоятельного решения по теме «Решение тригонометрических уравнений с отбором корней».

Найдите значение выражения $\frac{48x_1}{x_2}$, если x_1 — наибольший отрицательный корень, x_2 — наименьший положительный корень.

$$\cos 2x - \sin 3x = \sqrt{3} (\cos 3x - \sin 2x)$$

$$\cos^2\left(5x + \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(9x + \frac{7\pi}{2}\right) + \cos^2\left(13x + \frac{5\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos^2\left(5x - \frac{3\pi}{2}\right) + \cos^2\left(9x - \frac{7\pi}{2}\right) + \cos^2\left(13x - \frac{5\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\cos^3 x \sin x - \sin^3 x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos^3 x \sin 3x - \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{8}$$

$$\sin^3 2x \cos 6x + \cos^3 2x \sin 6x + 0,375 = 0$$

$$\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \sqrt{3}$$

$$\cos^4 x + 3\cos^2 x \sin^2 2x - 4\sin^4 2x = 0$$

$$\sin^4 3x + 5\cos^2 12x \sin^2 3x - 6\cos^4 12x = 0$$

$$|\cos x| = \cos x + \sin x$$

$$|\sin 2x| = 2\cos x - \sin 2x$$

$$\sqrt{\cos x - 1} + \sqrt{\sin^2 x + 1} \sqrt{2\cos x - 1} = 1 - 2\sin x$$

$$\sqrt{3\operatorname{tg} x - 1} + \sqrt{\sin 7x + 11} \sqrt{\cos x + 1} = \sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1$$

Найдите число корней уравнения.

$$\sqrt{\frac{3}{9-x^2}} \left(\sin^4 \frac{2x}{3} + \cos^4 \frac{2x}{3} - 1 \right) = 0$$

$$\sqrt{4-x^2} \left(5\cos \frac{x}{2} + 11\sin \frac{x}{2} + 5\sin x - 3 \right) = 0$$

$$\sqrt{5x-x^2} \left(17\sin \frac{x}{6} + 9\cos \frac{x}{6} - 8\sin \frac{x}{3} - 5 \right) = 0$$

$$\sqrt{3}\cos 5x + \sin 5x = 2\cos 13x, \text{ если } \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 2\sin 11x, \text{ если } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$2\cos x - 2\sin x = 2 + 3\sin 2x, \text{ если } \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right]$$

$$5\cos \frac{x}{2} + 5\sin \frac{x}{2} + 2\sin x + 4 = 0, \text{ если } \left[0; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$\cos 2x \cos 4x \cos 8x \cos 16x = \frac{1}{16}, \text{ если } \left[0; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$5\cos 4x + 8\sin x = 13, \text{ если } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

$$9\sin \frac{x}{2} - 5\cos x = 14, \text{ если } \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$$

$$7\sin \frac{x}{2} 8\cos x - 15 = 0, \text{ если } \left[-\frac{11\pi}{2}; 0 \right]$$

$$\sqrt{\frac{3}{12+x-x^2}} (\sin 6x \sin 4x - \sin 5x \sin 3x) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{16-x^2}} (\cos 5x - \sin 7x) = 0$$

$$\cos 9x + \cos (x + \pi) + \cos \left(\frac{\pi}{2} + 3x \right) = \sin (x - 11x), \text{ если } \left[0; \frac{3\pi}{2} \right]$$